SISTEMAS DE ECUACIONES

Gadea Corral Martínez-Acitores

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES POR ESTUDIANTES DE 2º DE E.S.O.

TFM 2016

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por estudiantes de 2º de ESO

Gadea Corral Martínez-Acitores

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE IMÁGENES

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales mediante los distintos métodos por los estudiantes de 2º de ESO.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre sistemas de ecuaciones, que se ha puesto en marcha en dos aulas de 2º de Educación Secundaria Obligatoria en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

Los sistemas de ecuaciones en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de sistemas de ecuaciones en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis de divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia al sistema de ecuaciones en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 2º de ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1

El contenido de los sistemas de ecuaciones en el currículo vigente

En este capítulo se lleva a cabo un análisis del currículo vigente y se examinan los contenidos relacionados con los sistemas de ecuaciones, abarcando por lo general el bloque de álgebra.

Una parte de este bloque se introduce en el currículo escalonadamente en los cursos de Educación Secundaria Obligatoria, comenzando por las ecuaciones e inecuaciones, luego los sistemas y por último las matrices en el último curso de Bachillerato. Mientras que la otra parte del bloque de álgebra permanece a lo largo de todo el currículo pero en diferentes niveles, como son los descriptores del lenguaje algebraico, la representación gráfica y las aplicaciones reales.

Por tanto, para el estudio del currículo vigente se realiza una agrupación por los siguientes descriptores comunes: lenguaje algebraico, ecuaciones e inecuaciones, sistemas, representación gráfica, aplicaciones reales y matrices.

El estudio se ha realizado en algunos cursos de las siguientes etapas: Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

1.1. El contenido de los sistemas de ecuaciones en Educación Primaria

1.1.1. 3er ciclo de Educación Primaria

Descriptor	Contenido
C1: Lenguaje algebraico	
C2: Ecuaciones e inecuaciones	
C3: Sistemas de ecuaciones	
C4: Representación gráfica	*Bloque 3: Geometría* • Sistemas de coordenadas cartesianas
C5: Aplicaciones reales	*Bloque 1: Números y operaciones* • Estimación del resultado de un cálculo y valoración de respuestas numéricas razonables. • Resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando estrategias personales de cálculo mental y relaciones entre los números, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.
C6: Matrices	

Tabla 1: Contenidos en 3er ciclo de Educación Primaria.

1.2. El contenido de los sistemas de ecuaciones en la Educación Secundaria Obligatoria

1.2.1. 1er curso de E.S.O.

Descriptor	Contenido
C1: Lenguaje algebraico	*Bloque 3: Álgebra* • Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos. • Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa.
C2: Ecuaciones e inecuaciones	
C3: Sistemas de ecuaciones	
C4: Representación gráfica	*Bloque 5: Funciones y gráficas* • Organización de datos en tablas de valores. • Coordenadas cartesianas. Representación de puntos en un sistema de ejes coordenados. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas. • Interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una tabla o representadas en una gráfica. Detección de errores en las gráficas que pueden afectar a su interpretación.
C5: Aplicaciones reales	*Bloque 3: Álgebra* • Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.
C6: Matrices	

Tabla 2: Contenidos en 1er curso de E.S.O.

1.2.2. 2º curso de E.S.O.

Descriptor	Contenido
C1: Lenguaje algebraico	*Bloque 3: Álgebra* • El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades.

Descriptor	Contenido
C2: Ecuaciones e inecuaciones	*Bloque 3: Álgebra* • Obtención del valor numérico de una expresión algebraica. • Significado de ecuaciones y de las soluciones de una ecuación. • Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones a otras equivalentes. Interpretación de la solución.
C3: Sistemas de ecuaciones	
C4: Representación gráfica	*Bloque 5: Funciones y gráficas* • Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla. • Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes.
C5: Aplicaciones reales	*Bloque 3: Álgebra* • Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido.
C6: Matrices	

Tabla 3: Contenidos en 2º curso de E.S.O.

1.2.3. 3º curso de E.S.O.

Descriptor	Contenido
C1: Lenguaje algebraico	*Bloque 3: Álgebra* • Traducción de situaciones de lenguaje verbal al algebraico. • Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables.
C2: Ecuaciones e inecuaciones	*Bloque 3: Álgebra* • Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.
C3: Sistemas de ecuaciones	*Bloque 3: Álgebra* • Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Descriptor	Contenido
C4: Representación gráfica	*Bloque 5: Funciones* • Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
C5: Aplicaciones lineales	*Bloque 3: Álgebra* • Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
C6: Matrices	

Tabla 4: Contenidos en 3º curso de E.S.O.

1.2.4. 4º curso de E.S.O.

Descriptor	Contenido. Opción A.	Contenido. Opción B.
C1: Lenguaje algebraico	*Bloque 3: Álgebra* • Manejo de expresiones literales para la obtención de valores concretos en fórmulas y ecuaciones en diferentes contextos.	*Bloque 3: Álgebra* • Manejo de expresiones literales. Utilización de igualdades notables.
C2: Ecuaciones e inecuaciones	*Bloque 3: Álgebra* • Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error.	*Bloque 3: Álgebra* • Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error. • Resolución de inecuaciones.
C3: Sistemas de ecuaciones	*Bloque 3: Álgebra* • Resolución algebraica de sistemas de ecuaciones.	*Bloque 3: Álgebra* • Resolución algebraica de sistemas de ecuaciones.
C4: Representación gráfica	*Bloque 3: Álgebra* • Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones. • Resolución de otros tipos de ecuaciones a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.	*Bloque 3: Álgebra* • Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones. • Resolución de otros tipos de ecuaciones a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos. • Interpretación gráfica de inecuaciones.

Descriptor	Contenido. Opción A.	Contenido. Opción B.
C5: Aplicaciones lineales	*Bloque 3: Álgebra* • Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.	*Bloque 3: Álgebra* • Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. • Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones.
C6: Matrices		

Tabla 5: Contenidos en 4º curso de E.S.O.

1.3. Los sistemas de ecuaciones en Bachillerato

1.3.1. 1er curso de Bachillerato

Descriptor	Contenido. Ciencias y Tecnología	Contenido. Ciencias Sociales.
C1: Lenguaje algebraico		
C2: Ecuaciones e inecuaciones	*Bloque 1: Aritmética y álgebra* • Resolución de ecuaciones e inecuaciones. *Bloque 2: Geometría* • Ecuaciones de la recta.	*Bloque 1: Aritmética y álgebra* • Ecuaciones.
C3: Sistemas de ecuaciones		*Bloque 1: Aritmética y álgebra* • Sistemas de ecuaciones
C4: Representación gráfica	*Bloque 1: Aritmética y álgebra* • Interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones. *Bloque 2: Geometría* • Posiciones relativas de la recta.	
C5: Aplicaciones lineales	*Bloque 1: Aritmética y álgebra* • Utilización de herramientas algebraicas en la resolución de problemas.	*Bloque 1: Aritmética y álgebra* • Resolución de problemas del ámbito de las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales.
C6: Matrices		*Bloque 1: Aritmética y álgebra* •Método de Gauss.

Tabla 6: Contenidos en 1er curso de Bachillerato.

1.3.2. 2º curso de Bachillerato

Descriptor	Contenido. Ciencias y Tecnología.	Contenido. Ciencias Sociales.
C1: Lenguaje algebraico		
C2: Ecuaciones e inecuaciones	*Bloque 2: Geometría* • Ecuaciones de la recta y plano en el espacio.	*Bloque 1: Álgebra* • Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas.
C3: Sistemas de ecuaciones	*Bloque 1: Álgebra* • Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.	*Bloque 1: Álgebra* • Sistemas de inecuaciones. • Programación lineal.
C4: Representación gráfica	*Bloque 2: Geometría* • Resolución de problemas de posiciones relativas de la recta.	
C5: Aplicaciones lineales	*Bloque 1: Álgebra* • Aplicación de las operaciones y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.	*Bloque 1: Álgebra* • Interpretación del significado de las operaciones con matrices en la resolución de problemas extraídos de las ciencias sociales • Aplicaciones de la programación lineal a la resolución de problemas sociales, económicos y demográficos. • Interpretación de las soluciones.
C6: Matrices	*Bloque 1: Álgebra* • Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados de contextos reales. • Operaciones con matrices. • Determinantes. Propiedades elementales de los determinantes. Rango de una matriz.	*Bloque 1: Álgebra* • Las matrices como expresión de tablas y grafos. • Suma y producto de las matrices.

Tabla 7: Contenidos en 2º curso de Bachillerato.

Capítulo 2

Los criterios de evaluación de los sistemas de ecuaciones en el currículo vigente

El objetivo de este capítulo es analizar los criterios de evaluación del currículo vigente correspondientes a los contenidos enumerados en el capítulo anterior. Se mantiene la misma estructura de los descriptores comunes.

Los criterios de evaluación siguen bloques temáticos, por esta razón un mismo criterio de evaluación incluye más de un descriptor.

2.1.Criterios de evaluación de los sistemas de ecuaciones en Educación Primaria

2.1.1. 3er ciclo de Educación Primaria

Descriptor	Criterios de evaluación
C1: Lenguaje algebraico	
C2: Ecuaciones e inecuaciones	
C3: Sistemas de ecuaciones	
C4: Representación gráfica	*6.-Interpretar una representación espacial a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares.* Este criterio pretende evaluar el desarrollo de capacidades espaciales en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y, en ciertos casos, ejes de coordenadas, mediante representaciones de espacios familiares.
C5: Aplicaciones lineales	
C6: Matrices	

Tabla 8: Criterios de evaluación en 3er ciclo de Educación Primaria

2.2. Criterios de evaluación de los sistemas de ecuaciones en la Educación Secundaria Obligatoria

2.1.1. 1er curso de E.S.O.

Descriptor	Criterios de evaluación
C1: Lenguaje algebraico	*3.-Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números, utilizar letras para simbolizar distintas cantidades y obtener expresiones algebraicas como síntesis en secuencias numéricas, así como el valor numérico de fórmulas sencillas.* Este criterio pretende comprobar la capacidad para percibir en un conjunto numérico aquello que es común, la secuencia lógica con que se ha construido, un criterio que permita ordenar sus elementos y, cuando sea posible, expresar algebraicamente la regularidad percibida. Se pretende, asimismo, valorar el uso del signo igual como asignador y el manejo de la letra en sus diferentes acepciones. Forma parte de este criterio también la obtención del valor numérico en fórmulas simples con una sola letra.
C2:Ecuaciones e inecuaciones	
C3: Sistemas de ecuaciones	
C4: Representación gráfica	*6.-Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.* Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente. Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados, así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.
C5: Aplicaciones lineales	*8.-Utilizar estrategias y técnicas simples de resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más sencillo, y comprobar la solución obtenida y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución.* Con este criterio se valora la forma de enfrentarse a tareas de resolución de problemas para los que no se dispone de un procedimiento estándar que permita obtener la solución. Se evalúa desde la comprensión del enunciado a partir del análisis de cada una de las partes del texto y la identificación de los aspectos más relevantes, hasta la aplicación de estrategias simples de resolución, así como el hábito y la destreza necesarias para comprobar la solución. Se trata de evaluar, asimismo, la perseverancia en la búsqueda de soluciones y la confianza en la propia capacidad para lograrlo, y valorar la capacidad de transmitir con un lenguaje adecuado, las ideas y procesos personales desarrollados, de modo que se hagan entender y entiendan a sus compañeros. También se pretende valorar su actitud positiva para realizar esta actividad de intercambio.
C6: Matrices	

Tabla 9: Criterios de evaluación en 1er curso de E.S.O.

2.1.2. 2º curso de E.S.O.

Descriptor	Criterios de evaluación
C1: Lenguaje algebraico C2: Ecuaciones e inecuaciones	*3.-Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas.* Se pretende comprobar la capacidad de utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas y simbolizar relaciones, así como plantear ecuaciones de primer grado para resolverlas por métodos algebraicos y también por métodos de ensayo y error. Se pretende evaluar, también, la capacidad para poner en práctica estrategias personales como alternativa al álgebra a la hora de plantear y resolver los problemas. Asimismo, se ha de procurar valorar la coherencia de los resultados.
C3: Sistemas de ecuaciones	
C4: Representación gráfica	*5.-Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado.* Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información, en especial el paso de la gráfica correspondiente a una relación de proporcionalidad a cualquiera de los otros tres: verbal, numérico o algebraico. Se trata de evaluar también la capacidad de analizar una gráfica y relacionar el resultado de ese análisis con el significado de las variables representadas.
C5: Aplicaciones lineales	*7.-Utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas, tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error sistemático, la división del problema en partes, así como la comprobación de la coherencia de la solución obtenida, y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución.* Con este criterio se valora la forma de enfrentarse a tareas de resolución de problemas para los que no se dispone de un procedimiento estándar que permita obtener la solución. Se evalúa desde la comprensión del enunciado a partir del análisis de cada una de las partes del texto y la identificación de los aspectos más relevantes, hasta la aplicación de estrategias de resolución, así como el hábito y la destreza necesarias para comprobar la corrección de la solución y su coherencia con el problema planteado. Se trata de evaluar, asimismo, la perseverancia en la búsqueda de soluciones y la confianza en la propia capacidad para lograrlo y valorar la capacidad de transmitir con un lenguaje suficientemente preciso, las ideas y procesos personales desarrollados, de modo que se hagan entender y entiendan a sus compañeros. También se pretende valorar su actitud positiva para realizar esta actividad de contraste.
C6: Matrices	

Tabla 10: Criterios de evaluación en 2º curso de E.S.O.

2.1.3. 3^{er} curso de E.S.O.

<table>
<tr><th>Descriptor</th><th>Criterios de evaluación</th></tr>
<tr><td>C1: Lenguaje algebraico</td><td>2.-Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos.
A través de este criterio, se pretende comprobar la capacidad de extraer la información relevante de un fenómeno para transformarla en una expresión algebraica. En lo referente al tratamiento de pautas numéricas, se valora si se está capacitado para analizar regularidades y obtener expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas.</td></tr>
<tr><td>C2: Ecuaciones e inecuaciones</td><td rowspan="3">3.-Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente a ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos, mediante el uso adecuado de los recursos tecnológicos.</td></tr>
<tr><td>C3: Sistemas de ecuaciones</td></tr>
<tr><td>C5: Aplicaciones lineales</td></tr>
<tr><td>C4: Representación gráfica</td><td>5.-Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica.
Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.</td></tr>
<tr><td>C6: Matrices</td><td></td></tr>
</table>

Tabla 11: Criterios de evaluación en 3^{er} curso de E.S.O.

2.1.4. 4º curso de E.S.O.

<table>
<tr><th>Descriptor</th><th>Criterios de evaluación.
Opción A.</th><th>Criterios de evaluación.
Opción B.</th></tr>
<tr><td>C1: Lenguaje algebraico</td><td></td><td rowspan="5">2.-Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos y métodos algebraicos para resolver problemas.
Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad de usar el álgebra simbólica para representar y explicar relaciones matemáticas y utilizar sus métodos en la resolución de problemas mediante inecuaciones, ecuaciones y sistemas.</td></tr>
<tr><td>C2: Ecuaciones e inecuaciones</td><td rowspan="4">3.-Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Este criterio va dirigido a comprobar que el alumno está preparado para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente en forma de ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos y mediante el uso adecuado de las tecnologías de la información.</td></tr>
<tr><td>C3: Sistemas de ecuaciones</td></tr>
<tr><td>C4: Representación gráfica</td></tr>
<tr><td>C5: Aplicaciones lineales</td></tr>
<tr><td>C6: Matrices</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 12: Criterios de evaluación en 4º curso de E.S.O.

2.3. Los sistemas de ecuaciones en Bachillerato

2.3.1. 1er curso de Bachillerato

Ciencias y Tecnología

Descriptor	Criterios de evaluación
C1: Lenguaje algebraico	
C3: Sistemas de ecuaciones	
C4: Representación gráfica	*3.-Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en dos dimensiones y utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones.* La finalidad de este criterio es evaluar la capacidad para utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la interpretación de fenómenos diversos. Se pretende valorar especialmente la capacidad para realizar transformaciones sucesivas con objetos geométricos en el plano.

<table>
<tr><th>Descriptor</th><th>Criterios de evaluación</th></tr>
<tr><td>C2: Ecuaciones e inecuaciones</td><td rowspan="3">1.-Utilizar correctamente los números reales y sus operaciones para presentar e intercambiar información; estimar los efectos de las operaciones sobre los números reales y sus representaciones gráfica y algebraica y resolver problemas extraídos de la realidad social y de la naturaleza que impliquen la utilización de ecuaciones e inecuaciones, así como interpretar los resultados obtenidos.
Se pretende comprobar con este criterio la adquisición de las destrezas necesarias para la utilización de los números reales, incluyendo la elección de la notación, las aproximaciones y las cotas de error acordes con la situación. Asimismo, se pretende evaluar la comprensión de las propiedades de los números, del efecto de las operaciones y del valor absoluto y su posible aplicación. También se debe valorar la capacidad para traducir algebraicamente una situación y llegar a su resolución, haciendo una interpretación de los resultados obtenidos.</td></tr>
<tr><td>C4: Representación gráfica</td></tr>
<tr><td>C5: Aplicaciones lineales</td></tr>
<tr><td>C6: Matrices</td><td></td></tr>
</table>

Tabla 13: Criterios de evaluación en 1er curso de Bachillerato. Ciencias y Tecnología.

Ciencias Sociales

<table>
<tr><th>Descriptor</th><th>Criterios de evaluación.</th></tr>
<tr><td>C1: Lenguaje algebraico</td><td rowspan="5">2.-Transcribir a lenguaje algebraico o gráfico una situación relativa a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas.
Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir algebraica o gráficamente una situación y llegar a su resolución haciendo una interpretación contextualizada de los resultados obtenidos, más allá de la resolución mecánica de ejercicios que sólo necesiten la aplicación inmediata de una fórmula, un algoritmo o un procedimiento determinado.</td></tr>
<tr><td>C2: Ecuaciones e inecuaciones</td></tr>
<tr><td>C3: Sistemas de ecuaciones</td></tr>
<tr><td>C5: Aplicaciones lineales</td></tr>
<tr><td>C6: Matrices</td></tr>
<tr><td>C4: Representación gráfica</td><td></td></tr>
</table>

Tabla 14: Criterios de evaluación en 1er curso de Bachillerato. Ciencias Sociales.

2.3.2. 2º curso de Bachillerato

Ciencias y Teconología

Descriptor	Criterios de evaluación
C1: Lenguaje algebraico	
C2: Ecuaciones e inecuaciones C4:Representación gráfica	*2.-Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en tres dimensiones y utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones.* La finalidad de este criterio es evaluar la capacidad para utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la interpretación de fenómenos diversos. Se pretende valorar especialmente la capacidad para realizar transformaciones sucesivas con objetos geométricos en el espacio de tres dimensiones.
C3: Sistemas de ecuaciones C5: Aplicaciones lineales	*3.-Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto.* Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico o gráfico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida. Se trata de evaluar la capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en álgebra, geometría y análisis, y combinarlas adecuadamente.
C6: Matrices	*1.-Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices y determinantes como instrumento para representar e interpretar datos y relaciones y, en general, para resolver situaciones diversas.* Este criterio pretende comprobar la destreza para utilizar el lenguaje matricial como herramienta algebraica, útil para expresar y resolver problemas relacionados con la organización de datos; especialmente, si son capaces de distinguir y aplicar, de forma adecuada al contexto, operaciones elemento a elemento, operaciones con filas y columnas, operaciones con submatrices y operaciones con la matriz como objeto algebraico con identidad propia.

Tabla 15: Criterios de evaluación en 2º curso de Bachillerato. Ciencias y Tecnología.

Ciencias Sociales

<table>
<tr><th>Descriptor</th><th>Criterios de evaluación.</th></tr>
<tr><td>C1: Lenguaje algebraico</td><td></td></tr>
<tr><td>C2: Ecuaciones e inecuaciones</td><td rowspan="3">2.-Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, ecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.
Este criterio está dirigido a comprobar la capacidad de utilizar con eficacia el lenguaje algebraico tanto para plantear un problema como para resolverlo, aplicando las técnicas adecuadas. No se trata de valorar la destreza a la hora de resolver de forma mecánica ejercicios de aplicación inmediata, sino de medir la competencia para seleccionar las estrategias y herramientas algebraicas; así como la capacidad de interpretar críticamente el significado de las soluciones obtenidas.</td></tr>
<tr><td>C3: Sistemas de ecuaciones</td></tr>
<tr><td>C5: Aplicaciones lineales</td></tr>
<tr><td>C4: Representación gráfica</td><td></td></tr>
<tr><td>C6: Matrices</td><td>1.-Utilizar el lenguaje matricial y aplicar las operaciones con matrices como instrumento para el tratamiento de situaciones que manejen datos estructurados en forma de tablas o grafos.
Este criterio pretende evaluar la destreza a la hora de utilizar las matrices tanto para organizar la información como para transformarla a través de determinadas operaciones entre ellas.</td></tr>
</table>

Tabla 16: Criterios de evaluación en 2º curso de Bachillerato. Ciencias Sociales.

Capítulo 3

Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto y su relación con los sistemas de ecuaciones en el currículo vigente

En este capítulo vamos a analizar una serie de ejercicios, problemas y cuestiones que aparecen en libros de texto relacionados con los sistemas de ecuaciones, estas actividades deberán seguir el estudio longitudinal de los contenidos fijados en el currículo, previamente visto en el Capítulo 1.

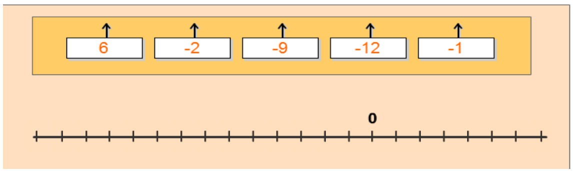
Se eligen los temas correspondientes de sistemas de ecuaciones en 5 cursos: el curso dónde se ha llevado a cabo la experimentación, 2º E.S.O., dos cursos anteriores, 6º Educación Primaria y 1º E.S.O. y dos cursos posteriores al curso experimentado, 3º E.S.O. y 4º E.S.O.

3.1.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 6º Educación Primaria

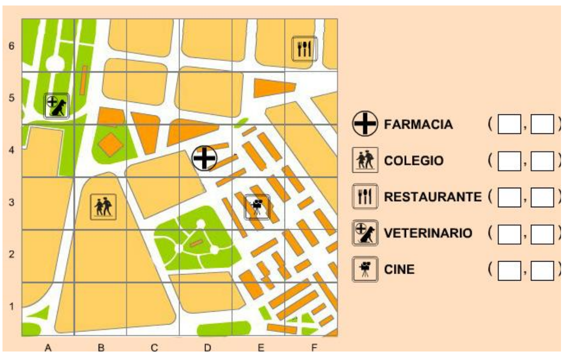
El libro de 6º de Educación Primaria de la editorial ANAYA está dividido en 15 unidades, en las cuales se hace un estudio del sistema de coordenadas cartesianas en dos temas:

- Unidad 4: Los números negativos.
- Unidad 15: Planos y mapas.

Actividad tipo: Ejercicio
Descripción: Se le plantea al alumno colocar los números positivos y negativos en el eje de abscisas.
Ejemplo:



Actividad tipo: Situación
Descripción: El alumno tiene que ser capaz de identificar dónde se encuentran los lugares dados en el mapa. Dando como solución letra y número, representando eje de abscisas y de ordenadas correspondientemente.
Ejemplo:



Actividad tipo: Cuestión
Descripción: Se le plantean al alumno varias preguntas que deberá contestar por la interpretación de las coordenadas, en este caso se utiliza sólo el eje de ordenadas.
Ejemplo:

1 Observa la ilustración y representa cada situación con un número entero.

a) Profundidad del submarinista con el traje negro.

b) Profundidad del submarinista con traje azul.

c) Posición del ánfora.

d) Altura a la que vuela el helicóptero.

e) Posición del atún.

2 Desde el helicóptero se lanza un cable para atar el ánfora y subirla. ¿Qué distancia recorre hasta llegar al helicóptero?

3 Ambos submarinistas desean pescar el atún. ¿Cuántos metros deberá ascender cada uno de ellos para alcanzarlo?

4 El pulpo asciende 5 metros y después desciende tres metros. ¿A qué profundidad se queda?

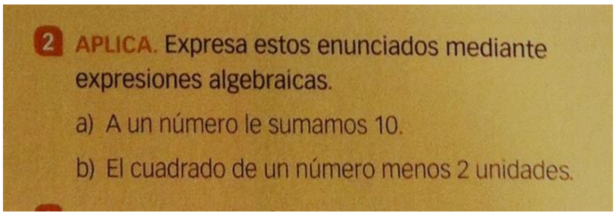
5 ¿Cuál de estas sumas representa los metros que asciende la estrella de mar hasta enredarse en el coral?:

$(+8) + (-5) = +3$ $(-8) + (+5) = -3$ $(-5) + (+8) = -3$ $(+5) + (-3) = +2$

3.2.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º E.S.O.

En 1º E.S.O. vamos a analizar la unidad de álgebra en los libros de Santillana y ANAYA. Ambos libros están divididos en 14 temas, Santillana sitúa al álgebra en la unidad 6 mientras que ANAYA lo da en la unidad 10.

Actividad tipo: Ejercicio
Descripción: En este ejercicio el alumno tiene que pasar el enunciado expresado en el lenguaje castellano al lenguaje algebraico.
Ejemplo:

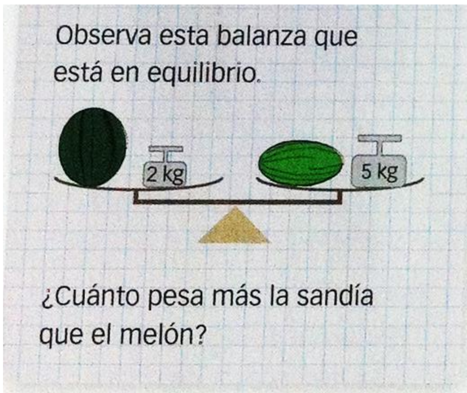


2 APLICA. Expresa estos enunciados mediante expresiones algebraicas.

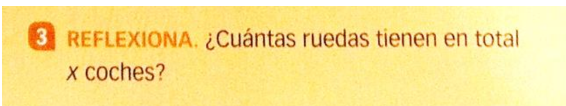
a) A un número le sumamos 10.

b) El cuadrado de un número menos 2 unidades.

Actividad tipo: Situación
Descripción: El alumno tiene que interpretar los platillos de la balanza para ver cuánto pesa más la sandía que el melón, si realiza una buena compresión lectora se dará cuenta que no tiene que contestar los pesos exactos del melón y la sandía, eso en 1º E.S.O. no saben hacerlo, estaríamos ante un sistema de ecuaciones compatible indeterminada de dos incógnitas y una solo ecuación. Yo además les hubiese planteado la pregunta de, ¿Quién pesa más el melón o la sandía?, para que interpretaran también la balanza en general y ver que la sandía pesa más que el melón porque para que estén equilibrados los platillos a la sandía le ponen 2kg y al melón 5.
Ejemplo:

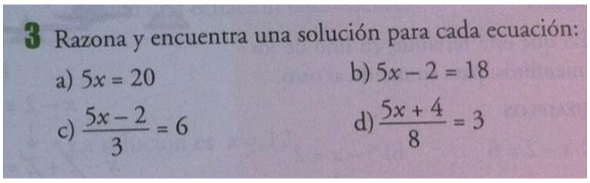


Actividad tipo: Cuestión
Descripción: En este tipo de ejercicios se le plantea al alumno una cuestión para que aprendan a pensar con incógnitas y no sólo con números exactos
Ejemplo:



3 REFLEXIONA. ¿Cuántas ruedas tienen en total *x* coches?

Actividad tipo: Ejercicio
Descripción: Se plantea al alumno una serie de ecuaciones para que se familiaricen con la resolución de ellas.
Ejemplo:
En el primer ejemplo la incógnita x se encuentra siempre en el miembro de la izquierda de la ecuación.

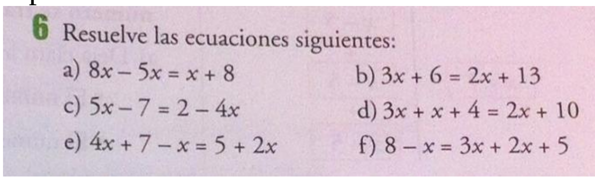


3 Razona y encuentra una solución para cada ecuación:

a) $5x = 20$ b) $5x - 2 = 18$

c) $\frac{5x-2}{3} = 6$ d) $\frac{5x+4}{8} = 3$

Y en el segundo ejemplo la x se encuentra en cualquiera de los miembros para que el alumno practique las operaciones básicas



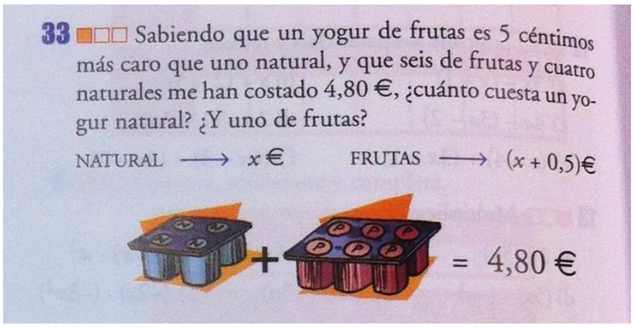
6 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $8x - 5x = x + 8$ b) $3x + 6 = 2x + 13$

c) $5x - 7 = 2 - 4x$ d) $3x + x + 4 = 2x + 10$

e) $4x + 7 - x = 5 + 2x$ f) $8 - x = 3x + 2x + 5$

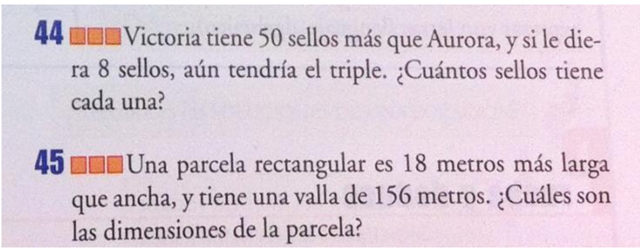
Actividad tipo: Problema
Descripción: Los problemas buscan que el alumno aprenda a plantear ecuaciones, para ello en los primeros problemas les ayudan con ilustraciones e identificando las incógnitas. Además el alumno debe resolver la ecuación para responder a la pregunta del problema.
Ejemplo:



33 Sabiendo que un yogur de frutas es 5 céntimos más caro que uno natural, y que seis de frutas y cuatro naturales me han costado 4,80 €, ¿cuánto cuesta un yogur natural? ¿Y uno de frutas?

NATURAL ⟶ x € FRUTAS ⟶ $(x + 0,5)$€

Actividad tipo: Problema
Descripción: Estos problemas tienen una gran dificultad para alumnos de 1º E.S.O., porque para la resolución de los mismos se necesita realizar un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
Ejemplo:



44 Victoria tiene 50 sellos más que Aurora, y si le diera 8 sellos, aún tendría el triple. ¿Cuántos sellos tiene cada una?

45 Una parcela rectangular es 18 metros más larga que ancha, y tiene una valla de 156 metros. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

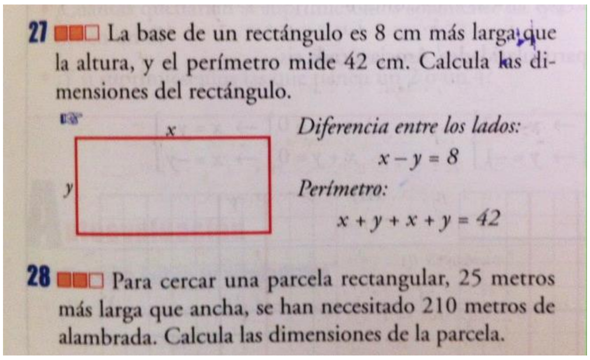
3.3.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º E.S.O.

El libro analizado es el libro utilizado durante la experimentación en el curso de 2º E.S.O. con la editorial de ANAYA. Este libro está divido en 12 unidades de las cuales 3 se tratan conocimientos de álgebra, lo que supone un 25% del curso total:

- Unidad 5: Álgebra.
- Unidad 6: Ecuaciones.
- Unidad 7: Sistemas de ecuaciones.

Vamos a centrarnos en los ejercicios, problemas y cuestiones tipo de la Unidad 7, ya que tratan del tema principal, los sistemas de ecuaciones. En las otras dos unidades realizan un repaso de lo visto en el curso anterior y aprenden la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Actividad tipo: Problema
Descripción: El mismo problema planteado en el libro de 1º E.S.O. lo encontramos en el libro de 2º E.S.O. pero valorado con una dificultad menor para el alumno.
Se platean dos problemas iguales pero con distintos datos, y en el primero de ellos se les da la interpretación y las ecuaciones planteadas como apoyo y el segundo de ellos está planteado como un problema de la vida cotidiana.
Ejemplo:

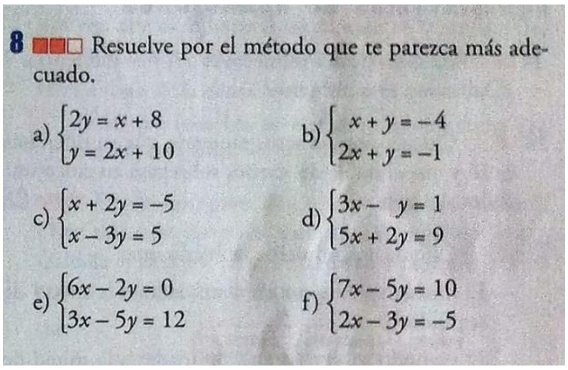


27 La base de un rectángulo es 8 cm más larga que la altura, y el perímetro mide 42 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo.

Diferencia entre los lados:
$x - y = 8$
Perímetro:
$x + y + x + y = 42$

28 Para cercar una parcela rectangular, 25 metros más larga que ancha, se han necesitado 210 metros de alambrada. Calcula las dimensiones de la parcela.

Actividad tipo: Ejercicio
Descripción: Una vez vistos los 3 métodos de resolución de sistemas de ecuaciones de forma analítica, se plantea este ejercicio para que el alumno elija, el método que crea conveniente en cada sistema.
Ejemplo:



8 Resuelve por el método que te parezca más adecuado.

a) $\begin{cases} 2y = x + 8 \\ y = 2x + 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = -5 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6x - 2y = 0 \\ 3x - 5y = 12 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 7x - 5y = 10 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$

Actividad tipo: Ejercicios
Descripción: También se plantean ejercicios para que el alumno resuelva ecuaciones mediante la representación gráfica, como en el primer ejercicio de los que se muestras a continuación. Con el objetivo que después sea capaz de representar gráficamente los sistemas e interpretar la solución, se ve reflejado en el 2º y 3º ejercicio de ejemplo respectivamente.
Ejemplo:

6 Representa gráficamente.

a) $2x - y = 1$ b) $2x + y = 1$

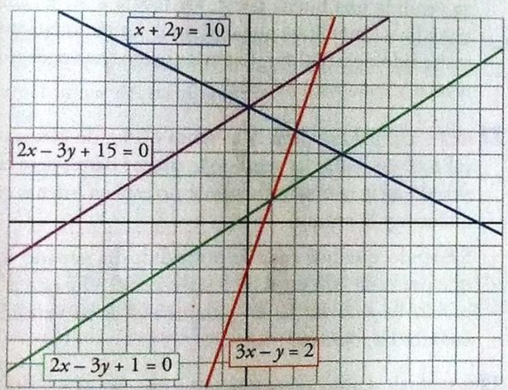
c) $y = \frac{x}{2} + 3$ d) $y = \frac{x}{2} - 1$

e) $x + 3y = 3$ f) $2x - 3y - 3 = 0$

3 Resuelve gráficamente.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - y = -3 \end{cases}$

4 Observa el gráfico y responde.



a) Escribe un sistema cuya solución sea $x = 2$, $y = 4$.

b) Escribe un sistema cuya solución sea $x = 0$, $y = 5$.

c) Escribe un sistema sin solución.

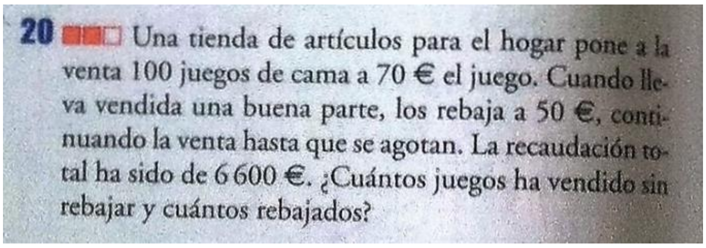
Actividad tipo: Problema
Descripción: El alumno tiene que resolver este problema de mezclas, se pueden ayudar de la tabla planteada.
Ejemplo:

5 ¿Qué cantidades de café, uno de calidad superior, a 13 €/kg, y otro de calidad inferior, a 8 €/kg, hay que utilizar para conseguir 30 kg de mezcla que resulte a 10 €/kg?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
CAFÉ SUPERIOR	x	13	$13x$
CAFÉ INFERIOR	y	8	$8y$
MEZCLA	30	10	300

Actividad tipo: Problema
Descripción: Con este tipo de problemas el alumno práctica la traducción del enunciado a una expresión algebraica.
Ejemplo:

Actividad tipo: Situación
Descripción: En este problema se plantea una situación de la vida cotidiana, el alumno tiene que realizar los 4 pasos completos, identificar las incógnitas, plantear las ecuaciones, resolver e interpretar la solución sin ayuda de imágenes, ni tablas.
Ejemplo:



20 Una tienda de artículos para el hogar pone a la venta 100 juegos de cama a 70 € el juego. Cuando lleva vendida una buena parte, los rebaja a 50 €, continuando la venta hasta que se agotan. La recaudación total ha sido de 6 600 €. ¿Cuántos juegos ha vendido sin rebajar y cuántos rebajados?

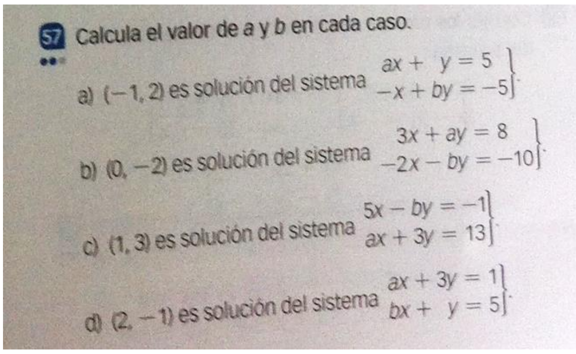
3.4.Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º E.S.O.

Para el curso de 3º E.S.O. se analizan los libros de las editoriales de Santillana y EDELVIVES. Ambos libros se dividen en 14 unidades, las cuales 3 de ellas están dedicadas al álgebra.

- Unidad 3: Polinomios.
- Unidad 4: Ecuaciones de primer grado y segundo grado.
- Unidad 5: Sistemas de ecuaciones.

A continuación, se muestran ejercicios, problemas y cuestiones tipo de la unidad correspondiente a los sistemas de ecuaciones.

Actividad tipo: Ejercicio
Descripción: Este ejercicio es una forma de cambiar el ejercicio tradicional de resolver un sistema de ecuaciones y dar la solución del mismo, en este tipo de ejercicios les dan la solución y el alumno tiene que completar el sistema de ecuaciones incompleto.
Ejemplo:



57 Calcula el valor de a y b en cada caso.

a) $(-1, 2)$ es solución del sistema $\left.\begin{array}{r} ax + y = 5 \\ -x + by = -5 \end{array}\right\}$.

b) $(0, -2)$ es solución del sistema $\left.\begin{array}{r} 3x + ay = 8 \\ -2x - by = -10 \end{array}\right\}$.

c) $(1, 3)$ es solución del sistema $\left.\begin{array}{r} 5x - by = -1 \\ ax + 3y = 13 \end{array}\right\}$.

d) $(2, -1)$ es solución del sistema $\left.\begin{array}{r} ax + 3y = 1 \\ bx + y = 5 \end{array}\right\}$.

Actividad tipo: Problema

Descripción: Se vuelve a repetir al alumno el mismo tipo de problema que en los dos cursos anteriores de obtener las dimensiones de un rectángulo, pero para el alumno de 3º E.S.O. se le complica la ecuación que tiene que plantear.

Ejemplos:

92 Halla las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que su perímetro mide 40 cm y que la altura mide las tres séptimas partes de la base.

93 El perímetro de un rectángulo es 30 cm. Si se toma un cuadrado cuyo lado mide lo mismo que dos largos y un ancho del rectángulo, el perímetro de este cuadrado es 96. Halla las dimensiones del rectángulo y el lado del cuadrado.

31 Calcula las dimensiones de un rectángulo cuya base es 3 cm mayor que su altura, sabiendo que, si cada uno de sus lados se prolongase 5 cm, el perímetro del rectángulo resultante mediría 50 cm.

Actividad tipo: Ejercicio

Descripción: Se plantea al alumno que resuelva los sistemas de ecuaciones por el método que crea más adecuado, a diferencia del curso anterior, en este nivel el alumno se enfrenta a ecuaciones lineales con denominadores.

Ejemplos:

71 Resuelve por el método que consideres más adecuado.

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{3x}{3} - \dfrac{2x}{4} = 2 \\ 3y + 5x = -1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = -1 \\ \dfrac{2x}{3} - \dfrac{y}{4} = 7 \end{array}\right\}$

24 Resuelve estos sistemas de ecuaciones por el método que consideres más adecuado.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 5 + x + 2y \\ x - 2y - 3 = 3 - 42y \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} (x + 4) + 2(y - 2) = 18 - x - y \\ x + y = 2 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x - y}{2} + x = -1 \\ 3(y - x) = 6 \end{array}\right\}$

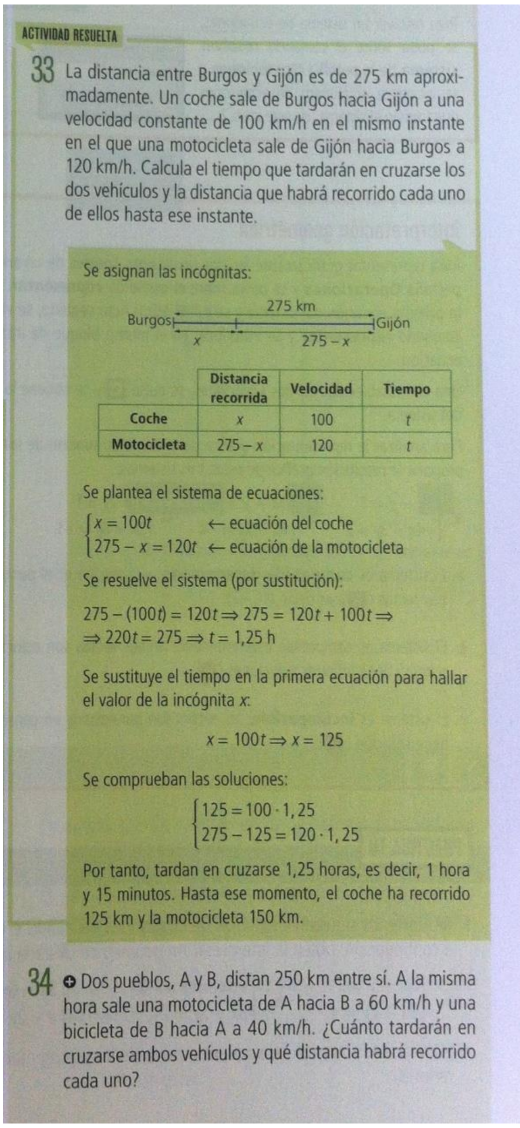
d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x - y}{3} + 2x = 4 + y \\ 2x = 4 + y \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 3y + 3 = x - 2(x + y) \\ \dfrac{2x + 3y}{2} = 18 \end{array}\right\}$

Actividad tipo: Problema

Descripción: Problemas planteados por situaciones de distancias entre dos o más vehículos o pueblos, etc. El primer ejemplo está resuelto para que el alumno aprenda a realizar este tipo de problemas.

Ejemplo:



ACTIVIDAD RESUELTA

33 La distancia entre Burgos y Gijón es de 275 km aproximadamente. Un coche sale de Burgos hacia Gijón a una velocidad constante de 100 km/h en el mismo instante en el que una motocicleta sale de Gijón hacia Burgos a 120 km/h. Calcula el tiempo que tardarán en cruzarse los dos vehículos y la distancia que habrá recorrido cada uno de ellos hasta ese instante.

Se asignan las incógnitas:

	Distancia recorrida	Velocidad	Tiempo
Coche	x	100	t
Motocicleta	$275 - x$	120	t

Se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 100t & \leftarrow \text{ecuación del coche} \\ 275 - x = 120t & \leftarrow \text{ecuación de la motocicleta} \end{cases}$$

Se resuelve el sistema (por sustitución):

$$275 - (100t) = 120t \Rightarrow 275 = 120t + 100t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 220t = 275 \Rightarrow t = 1{,}25 \text{ h}$$

Se sustituye el tiempo en la primera ecuación para hallar el valor de la incógnita x:

$$x = 100t \Rightarrow x = 125$$

Se comprueban las soluciones:

$$\begin{cases} 125 = 100 \cdot 1{,}25 \\ 275 - 125 = 120 \cdot 1{,}25 \end{cases}$$

Por tanto, tardan en cruzarse 1,25 horas, es decir, 1 hora y 15 minutos. Hasta ese momento, el coche ha recorrido 125 km y la motocicleta 150 km.

34 Dos pueblos, A y B, distan 250 km entre sí. A la misma hora sale una motocicleta de A hacia B a 60 km/h y una bicicleta de B hacia A a 40 km/h. ¿Cuánto tardarán en cruzarse ambos vehículos y qué distancia habrá recorrido cada uno?

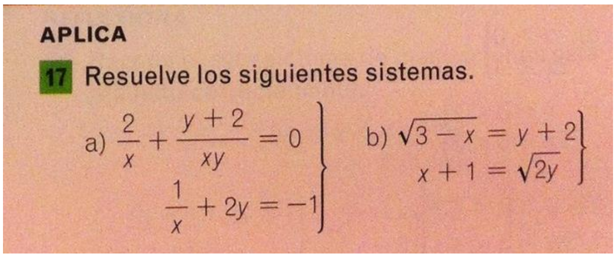
3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º E.S.O.

Para analizar los ejercicios, problemas y cuestiones tipo de 4º E.S.O. se eligen los libros de las editoriales Santillana y ANAYA. El total varía según la Opción A (Sociales) o B (Ciencias) y según la editorial. Pero los grandes temas dados del álgebra son los siguientes:

- Unidad 3: Polinomios.
- Unidad 4: Ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales.
- Unidad 5: Inecuaciones.

La Opción B de Ciencias también tiene una parte de fracciones algebraicas.

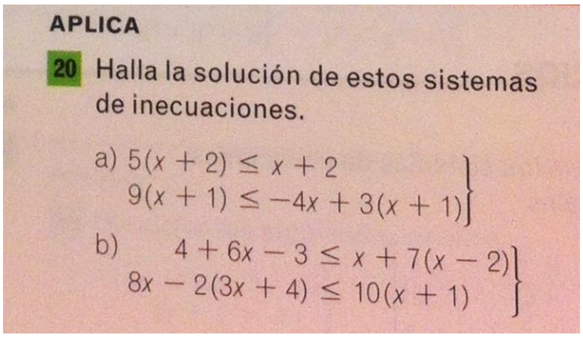
Actividad tipo: Ejercicio
Descripción: En el curso de 4º E.S.O. el alumno ya es capaz de resolver sistemas de ecuaciones no lineales.
Ejemplo:


APLICA

17 Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{x} + \frac{y+2}{xy} = 0 \\ \frac{1}{x} + 2y = -1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{3-x} = y+2 \\ x+1 = \sqrt{2y} \end{array}\right\}$

Actividad tipo: Ejercicio
Descripción: El alumno también tiene nivel para resolver sistemas de inecuaciones.
Ejemplo:

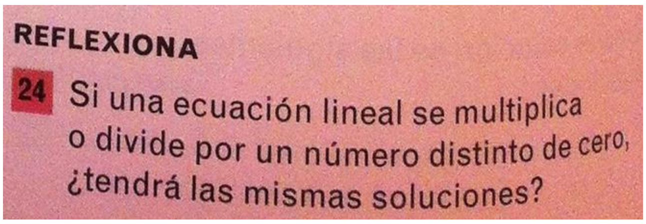

APLICA

20 Halla la solución de estos sistemas de inecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{l} 5(x+2) \leq x+2 \\ 9(x+1) \leq -4x + 3(x+1) \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} 4 + 6x - 3 \leq x + 7(x-2) \\ 8x - 2(3x+4) \leq 10(x+1) \end{array}\right\}$

Actividad tipo: Cuestión
Descripción: Se pretende comprobar la comprensión del alumno con las ecuaciones lineales.
Ejemplo:


REFLEXIONA

24 Si una ecuación lineal se multiplica o divide por un número distinto de cero, ¿tendrá las mismas soluciones?

Actividad tipo: Problema
Descripción: El alumno debe plantear las ecuaciones del problema planteado con %. Este problema trata una situación posible en la vida de los alumnos al comprar productos rebajados. También se da el uso de la moneda europea (€).
Ejemplo:

67. ●● Por un chándal y unas zapatillas de deporte que costaban 135 € he pagado 85,50 € en rebajas, ya que en la sección de textil tienen el 40 % de descuento, y en la de calzado, el 30 %. ¿Qué precio tenía cada artículo y cuánto me han costado?

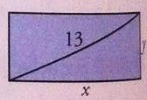
26 Por una calculadora y un cuaderno habríamos pagado, hace tres días, 10,80 €. El precio de la calculadora ha aumentado un 8%, y el cuaderno tiene una rebaja del 10%. Con estas variaciones, los dos artículos nos cuestan 11,34 €.

¿Cuánto costaba cada uno de los artículos hace tres días?

Actividad tipo: Problema
Descripción: El problema planteado de geometría con las dimensiones de un rectángulo, pero va aumentando la dificultad, para el alumno de 4º E.S.O. la ecuación a plantear con el dato del área no es lineal.
Ejemplo:

39 **Ejercicio resuelto**

Hallar la dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 34 m, y su diagonal, 13 m.



$$\left.\begin{array}{l}2x + 2y = 34\\ x^2 + y^2 = 13^2\end{array}\right\}\begin{array}{l}x + y = 17 \rightarrow y = 17 - x\\ x^2 + (17 - x)^2 = 169 \rightarrow\end{array}$$

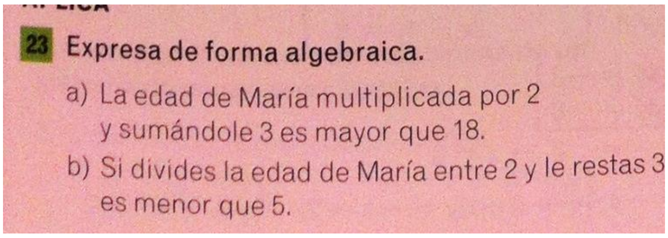
$$\rightarrow 2x^2 - 34x + 120 = 0 \rightarrow x^2 - 17x + 60 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 12 \text{ m} \rightarrow y = 5\text{m} \\ x = 5 \text{ m} \rightarrow y = 12 \text{ m}\end{cases}$$

Los lados del rectángulo miden 12 m y 5 m.

40 El perímetro de un rectángulo es de 20 cm, y su área, de 21 cm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Actividad tipo: Ejercicio
Descripción: El alumno tiene que pasar el enunciado a una expresión algebraica con inecuaciones.
Ejemplo:

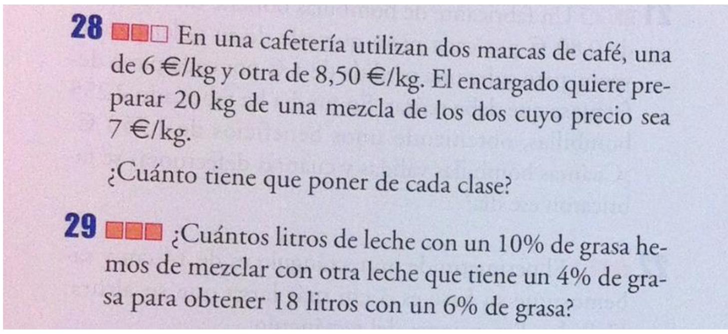


23 Expresa de forma algebraica.

a) La edad de María multiplicada por 2 y sumándole 3 es mayor que 18.

b) Si divides la edad de María entre 2 y le restas 3 es menor que 5.

Actividad tipo: Problema
Descripción: Problemas de mezclas con distintas dificultades. El primer ejemplo se planteó también a alumnos de 2º E.S.O., pero el segundo ejemplo es un problema con mayor nivel de dificultad porque tiene algunos datos con %.
Ejemplo:



28 En una cafetería utilizan dos marcas de café, una de 6 €/kg y otra de 8,50 €/kg. El encargado quiere preparar 20 kg de una mezcla de los dos cuyo precio sea 7 €/kg.

¿Cuánto tiene que poner de cada clase?

29 ¿Cuántos litros de leche con un 10% de grasa hemos de mezclar con otra leche que tiene un 4% de grasa para obtener 18 litros con un 6% de grasa?

Capítulo 4

Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

A lo largo de este capítulo se va a estudiar la coherencia que tienen los ejercicios, problemas y cuestiones tipo vistos en el capítulo anterior de los libros de texto con el currículo analizado en el primer capítulo.

Este análisis se realizará para las etapas educativas de: Primaria, Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

4.1.Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

El currículo analizado es en espiral es decir, gradualmente, en cada curso se van introduciendo nuevos objetos matemáticos aunque también se mantienen los vistos en años anteriores.

A continuación, se recogen los contenidos principales introducidos en los cursos según el currículo a modo de resumen:

Curso	Contenido
6º Educación Primaria	- Sistema de coordenadas cartesianas.
1º de E.S.O.	- Introducción al lenguaje algebraico.
2º de E.S.O.	- Resolución de ecuaciones de primer grado.
3º de E.S.O.	- Resolución de ecuaciones de segundo grado. - Sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas.
4º de E.S.O.	- Resolución de otro tipo de ecuaciones e inecuaciones
1º de Bachillerato	

Tabla 17: Contenidos en el currículo.

Y los contenidos de manera sintetizada en los libros de texto son los siguientes:

Curso	Contenido
6º Educación Primaria	- Planos y mapas
1º de E.S.O.	- Introducción al lenguaje algebraico. - Resolución de ecuaciones de primer grado.
2º de E.S.O.	- Resolución de ecuaciones de primer grado. - Resolución de ecuaciones de segundo grado. - Sistemas de ecuaciones lineales.
3º de E.S.O.	- Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. - Sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas.

Curso	Contenido
4º de E.S.O.	- Resolución de otro tipo de ecuaciones (bicuadradas, x en el denominador y con raíces cuadradas) e inecuaciones - Sistema de ecuaciones lineales y no lineales.
1º de Bachillerato	- Resolución de otro tipo de ecuaciones (exponenciales y logarítmicas).

Tabla 18: Contenidos en los libros de texto.

Como se puede observar, en los libros de texto los objetos matemáticos no varían tanto de un curso a otro, sino que se repite parte de lo estudiado el año anterior. Con ello se pretende que el aprendizaje de los conceptos sea lo más amplio posible a la vez que se relacionan con otros nuevos.

Comparando las tablas anteriores, el contenido en los libros de texto se adelanta un año a lo que establece el Real Decreto de Mínimos, esto deja margen a los centros a poder llegar a los mínimos establecidos por el currículo y de ampliar o no los contenidos matemáticos.

De forma general, se enumeran los contenidos incluidos en los libros de texto que se encuentran ausentes en el currículo:

- Resolución de ecuaciones de primer grado en 1º de E.S.O.
- Resolución de ecuaciones de segundo grado y los sistemas de ecuaciones lineales en 2º de E.S.O.
- Sistema de ecuaciones no lineales en 4º de E.S.O.

Las siguientes imágenes muestran lo dicho anteriormente en forma de espiral:

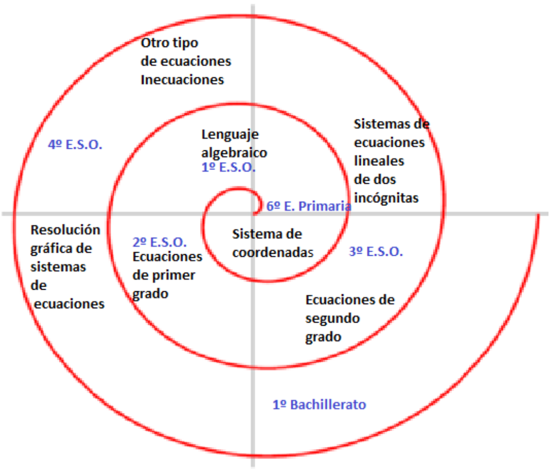


Imagen 1: Contenidos en el currículo en forma de espiral.

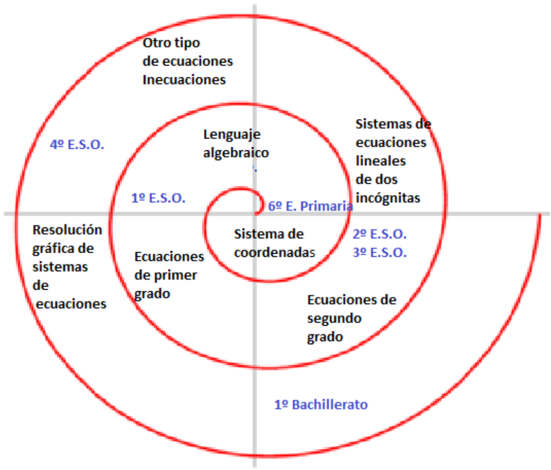


Imagen 2: Contenidos en los libros de texto en forma de espiral.

Observamos que en el primer curso de Bachillerato de Ciencias no se incluye ningún objeto matemático nuevo, básicamente se retoman los temas visto en cursos anteriores aunque a veces se amplía un poco para dar, por ejemplo, otro tipo de ecuaciones como las exponenciales o logarítmicas. Sin embargo, en el segundo curso de Bachillerato se introducen conceptos y algoritmos como: Matriz, determinante de una matriz, método de Gauss, etc.

4.2.Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

La coherencia de los libros de texto en relación con el currículo es completa, ya que los libros recogen todos los objetos matemáticos del currículo oficial. Los libros de texto cumplen requerimientos mínimos de cada etapa establecidas por el Real Decreto. En resumen, existe una coherencia en la enseñanza de las matemáticas.

4.2.1. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo en Educación Primaria

Los alumnos de 6º de Educación Primaria aprenden el sistema de coordenadas establecido en el currículo, ya que han trabajado temas sobre posiciones en planos y mapas. Por tanto, este objeto matemático, el sistema de coordenadas, viene representado en los libros de texto con cuestiones de la vida cotidiana.

4.2.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo en E.S.O

Los libros de texto cumplen con los contenidos recogidos en el currículo. De hecho, tal y como hemos visto los libros plantean algunos contenidos un año antes al establecido, dejando margen al centro para ampliar los contenidos obligatorios de cada curso.

En esta etapa el currículo enfatiza el uso del lenguaje algebraico para representar y resolver situaciones de la vida cotidiana. Sin embargo, los libros de texto se centran en ejercicios y problemas rutinarios dejando a veces de lado la interpretación de estos problemas, si tiene sentido la solución, etc. Por ejemplo, está claro que un alumno no ha pensado en una situación real cuando te dice que para obtener una mezcla de 20 kg. de arroces tienes que mezclar 18 kg. de un tipo y 10 kg del otro tipo.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio sobre los sistemas de ecuaciones en 2º E.S.O.

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza el tema de estudio sobre los sistemas de ecuaciones, llevado a cabo con dos grupos de alumnos de 2º de Educación Obligatoria Secundaria. El análisis se desarrolla a lo largo de cuatro capítulos.

En el primer capítulo, se analiza el libro de texto utilizado en este proceso de estudio: los objetos matemáticos presentes en él así como la estructura de sus contenidos y actividades.

En el segundo capítulo, se prevén las dificultades relacionadas con los sistemas de ecuaciones y el posible origen de las mismas.

A continuación, se planifica el proceso de estudio del tema en el tercer capítulo: la distribución de los tiempos en clase y las actividades y tareas a proponer a los alumnos.

En el cuarto y último capítulo, se detalla la puesta en práctica del proceso, los comportamientos esperados de los alumnos y se analizan los resultados obtenidos en la experimentación. La síntesis y conclusiones reflejadas en la parte final de este bloque se extraen del análisis comparativo entre las previsiones y resultados.

Capítulo 5

Los sistemas de ecuaciones en el libro de texto de referencia

En este capítulo se recogen los resultados del análisis sobre los sistemas de ecuaciones en el libro de texto de 2º de E.S.O. de la editorial ANAYA que se ha usado para impartir las clases durante el periodo de experimentación.

5.1. Objetos matemáticos involucrados

En este apartado se examinan los principales objetos y relaciones implicadas en los sistemas de ecuaciones en el nivel de 2º de E.S.O. Los elementos estudiados son el lenguaje utilizado, los conceptos o nociones presentes, las situaciones o ejercicios planteados, los procedimientos o acciones en relación con los ejercicios, las propiedades relevantes al tema y los argumentos o razonamientos expuestos para la resolución de las actividades y la explicación de los contenidos.

5.1.1. Lenguaje

- **Verbal:** valores de x e y, ecuaciones de dos incógnitas, expresiones algebraicas, ecuaciones lineales, sistema, solución del sistema, par de valores, sustitución, igualación, reducción, comprobar, despejar x, resolver, interpretar, plantear, punto de corte.
- **Gráfico:** observa el gráfico, coordenada, infinitas soluciones, sin solución, representar gráficamente, recoger valores en la tabla de datos, recta asociada en el plano.
- **Simbólico:** corchetes para agrupar las dos ecuaciones del sistema:

  $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases}$, x e y para representar a las incógnitas.

5.1.2. Conceptos

- **Previos:** operaciones básicas con expresiones algebraicas, incógnita, solución de una ecuación, suprimir denominadores en una igualdad, realizar ecuaciones equivalente.
- **Emergentes:** par de valores, ecuación lineal, solución de un sistema formado por dos ecuaciones lineales, interpretación.

5.1.3. Situaciones

- **Ejercicios descontextualizados:** resolución de actividades mediante los 3 métodos, representación gráfica de sistemas o identificación de los distintos tipos de gráficas según el sistema …

- **Ejercicios contextualizados:** en este tipo de ejercicios los alumnos tienen que resolverlos e interpretar los resultados obtenidos, son ejercicios enfocados en la vida real. Por ejemplo actividades con edades de familiares, con ahorros de amigos para comprar material escolar o chucherías, división en grupos de una clase para actividades de deporte o por notas en asignaturas del colegio. También se dan problemas de mezclar ingredientes o materiales, beneficios en una empresa …

5.1.4. Procedimientos

Resolución de sistemas de ecuaciones por:

- Representación gráfica.
- Método de sustitución
- Método de igualación
- Método de reducción

5.1.5. Propiedades

- Una ecuación representa un equilibrio entre dos miembros.
- Una ecuación es equivalente a la ecuación dada cuando se suman, restan, multiplican o dividen una misma expresión en los dos miembros de la ecuación.
- Al pasar una expresión de adición o sustracción un miembro a otro de la ecuación hay que cambiarle el signo. En cambio, si esta expresión es de multiplicación o división el signo se mantiene.

5.1.6. Argumentos

- Ilustraciones y representaciones gráficas.
- Comprobaciones de los métodos.
- Demostraciones del procedimiento a través de ejemplos.

5.2. Análisis global de la unidad didáctica

En el presente apartado se lleva a cabo un análisis global del tema 7 titulado ‘Sistemas de ecuaciones’ en el libro de texto de la editorial ANAYA utilizado en el centro durante la experimentación del curso 2º de E.S.O.

El tema se divide en varias partes:

1. Presentación a modo de introducción y recordatorio de ciertos conceptos
2. Sección 1: Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
3. Sección 2: Sistemas de ecuaciones lineales
4. Sección 3: Métodos para la resolución de sistemas lineales

5. Sección 4: Resolución de problemas con ayuda de los sistemas de ecuaciones
6. Ejercicios y problemas
7. Desarrolla tus competencias

A continuación, se realiza una descripción detallada de cada parte.

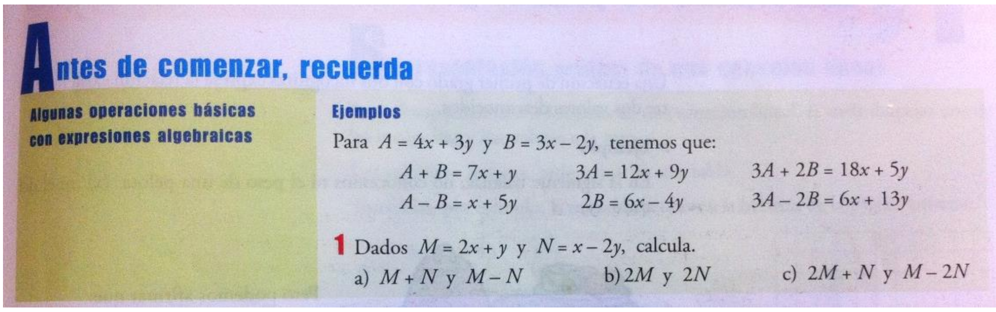
5.2.1. Presentación

La primera de ellas, es una presentación del tema que ocupa 2 hojas. En la primera se encuentra el número del tema, su título y debajo dos imágenes representando dos posibles problemas a solucionar con sistemas de ecuaciones, una de las imágenes son dos ancianos y se plantean las edades de cada uno y la otra imagen son dos balanzas con distintos pesos y distinto número de pirámides y bolas para sacar el peso de cada uno de los objetos. Se le plantea al alumno dos cuestiones por cada una de las imágenes y en la esquina inferior de la hoja hay tres frases introduciendo el tema:

- ‘En esta unidad vas a trabajar con ecuaciones de dos incógnitas’
- ‘Varias de esas ecuaciones forman un sistema’
- ‘Los sistemas de ecuaciones te servirán, también, para resolver problemas’

En la segunda hoja de la presentación, se titula ‘Antes de comenzar, recuerda’ y consta de 4 apartados para que el alumno retome lo visto el año anterior. Cada apartado consta de un ejercicio resuelto cómo ejemplo y tres o cuatro ejercicios planteados para practicar. Los 4 apartados son los siguientes:

- Operaciones básicas con expresiones algebraicas.
- Cómo se calcula el valor numérico de una expresión algebraica.
- Como se suprime los denominadores en una igualdad algebraica.
- Cómo se transponen términos en una ecuación para despejar una incógnita.



Antes de comenzar, recuerda

Algunas operaciones básicas con expresiones algebraicas

Ejemplos

Para $A = 4x + 3y$ y $B = 3x - 2y$, tenemos que:

$A + B = 7x + y$ $\quad 3A = 12x + 9y$ $\quad 3A + 2B = 18x + 5y$

$A - B = x + 5y$ $\quad 2B = 6x - 4y$ $\quad 3A - 2B = 6x + 13y$

1 Dados $M = 2x + y$ y $N = x - 2y$, calcula.

a) $M + N$ y $M - N$ b) $2M$ y $2N$ c) $2M + N$ y $M - 2N$

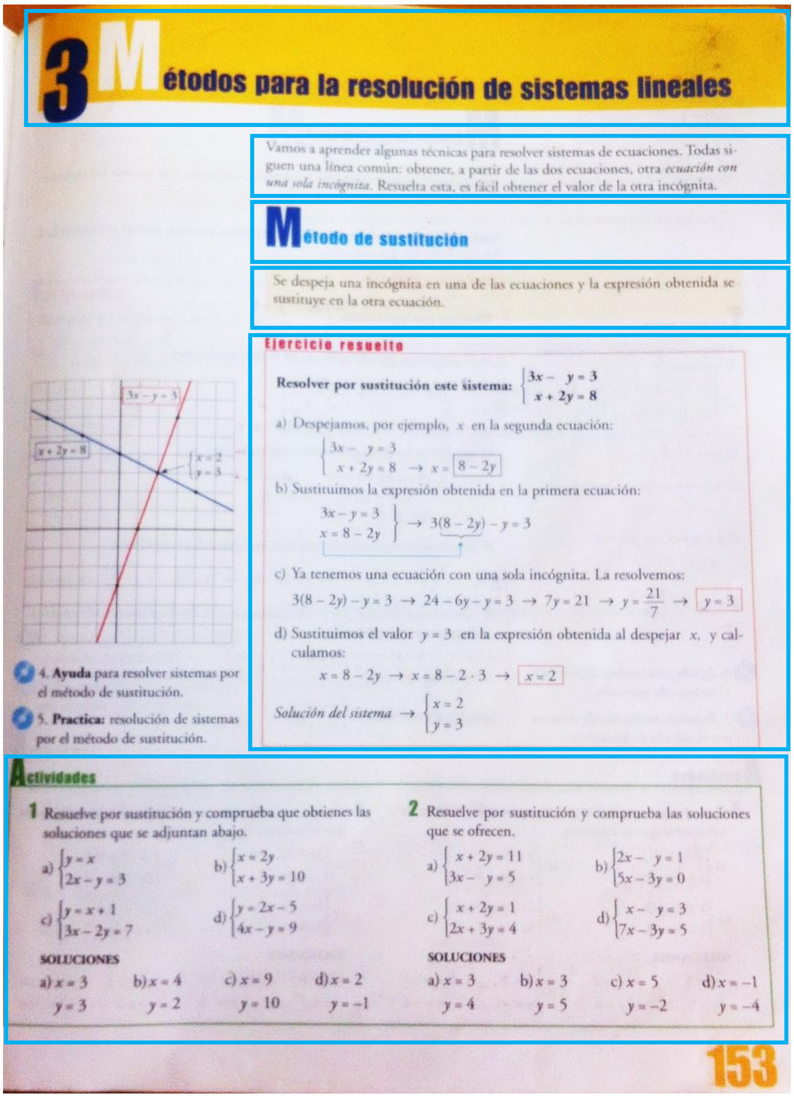
Imagen 3: Uno de los apartados de recordatorio en la presentación del libro de texto.

5.2.2. Secciones

Las 4 secciones del tema siguen aproximadamente la misma estructura:

- Título de la sección.
- Introducción de lo que se va a presentar.
- Título de los apartados si se tiene.
- Explicación del tema.
- Ejercicio resuelto, como ejemplo para explicar el procedimiento correctamente.
- Actividades planteadas para resolver por los alumnos.

Dicha estructura se puede observar en la Imagen 4.



3 Métodos para la resolución de sistemas lineales

Vamos a aprender algunas técnicas para resolver sistemas de ecuaciones. Todas siguen una línea común: obtener, a partir de las dos ecuaciones, otra *ecuación con una sola incógnita*. Resuelta esta, es fácil obtener el valor de la otra incógnita.

Método de sustitución

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y la expresión obtenida se sustituye en la otra ecuación.

Ejercicio resuelto

Resolver por sustitución este sistema: $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

a) Despejamos, por ejemplo, x en la segunda ecuación:

$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \rightarrow x = \boxed{8 - 2y}$

b) Sustituimos la expresión obtenida en la primera ecuación:

$\left.\begin{matrix} 3x - y = 3 \\ x = 8 - 2y \end{matrix}\right\} \rightarrow 3(8 - 2y) - y = 3$

c) Ya tenemos una ecuación con una sola incógnita. La resolvemos:

$3(8 - 2y) - y = 3 \rightarrow 24 - 6y - y = 3 \rightarrow 7y = 21 \rightarrow y = \frac{21}{7} \rightarrow \boxed{y = 3}$

d) Sustituimos el valor $y = 3$ en la expresión obtenida al despejar x, y calculamos:

$x = 8 - 2y \rightarrow x = 8 - 2 \cdot 3 \rightarrow \boxed{x = 2}$

Solución del sistema $\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

$3x - y = 3$

$x + 2y = 8$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

4. **Ayuda** para resolver sistemas por el método de sustitución.

5. **Practica:** resolución de sistemas por el método de sustitución.

Actividades

1 Resuelve por sustitución y comprueba que obtienes las soluciones que se adjuntan abajo.

a) $\begin{cases} y = x \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2y \\ x + 3y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x + 1 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 3$, $y = 3$ b) $x = 4$, $y = 2$ c) $x = 9$, $y = 10$ d) $x = 2$, $y = -1$

2 Resuelve por sustitución y comprueba las soluciones que se ofrecen.

a) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$

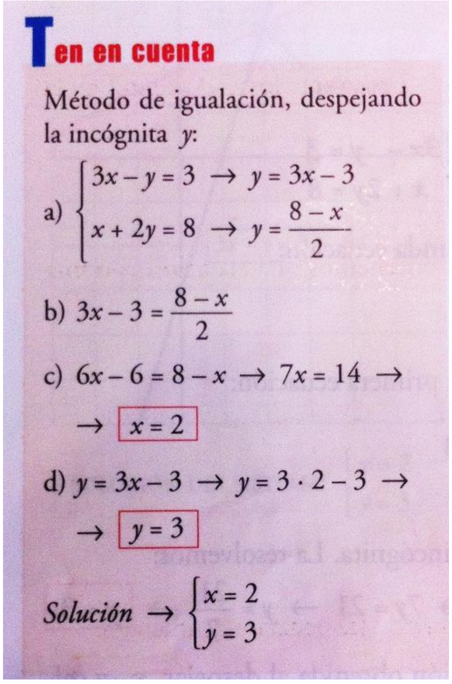
SOLUCIONES

a) $x = 3$, $y = 4$ b) $x = 3$, $y = 5$ c) $x = 5$, $y = -2$ d) $x = -1$, $y = -4$

153

Imagen 4: Distribución de las secciones del tema en del libro de texto.

- Algunas secciones añaden en un margen de la hoja alguna nota para prestar atención con el título de ‘Ten en cuenta’. Imagen 5.
- En la sección de los problemas hay imágenes acompañando el enunciado de dichos problemas. Imagen 6.



Ten en cuenta

Método de igualación, despejando la incógnita y:

a) $\begin{cases} 3x - y = 3 \rightarrow y = 3x - 3 \\ x + 2y = 8 \rightarrow y = \dfrac{8-x}{2} \end{cases}$

b) $3x - 3 = \dfrac{8-x}{2}$

c) $6x - 6 = 8 - x \rightarrow 7x = 14 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{x = 2}$

d) $y = 3x - 3 \rightarrow y = 3 \cdot 2 - 3 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{y = 3}$

Solución $\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

Imagen 5: Información resaltada en la Sección 3.

Imagen 6: Dibujo que acompaña a un problema en la Sección 4.

5.2.3. Ejercicios y problemas

Engloba una colección de 35 actividades para que el alumno practique lo visto en el tema. Cada actividad está valorada en un rango de dificultad de 1 a 3 (fácil, intermedio y difícil).

Este apartado se divide en 3 secciones según el tema principal a practicar:

1. **Sistemas de ecuaciones. Resolución gráfica.**
   Un conjunto de 4 actividades fáciles, las cuales tratan de representación gráfica. En 3 de ellos son los alumnos los que tienen que representar gráficamente el sistema de ecuaciones dado y en una de ellas les dan la representación gráfica y tienen que responder a unas cuestiones del tipo: 'identifica un sistema sin solución' o 'señala cual es el sistema con solución x=2, y=4'…

2. **Sistema de ecuaciones. Resolución algebraica.**
   En esta sección se encuentran 6 ejercicios, 3 de los ejercicios son para resolver 4 sistemas de ecuaciones fáciles por los 3 métodos de resolución aritmética, 1 ejercicio para cada método, sustitución, igualación y reducción. Después hay un ejercicio de dificultad media con 6 sistemas de ecuaciones, donde se deja al alumno valorar cual es el método más conveniente para resolverlo.

   A continuación, hay un ejercicio resulto de dificultad media porque las ecuaciones del sistema tienen paréntesis, con este ejercicio resuelto se muestra al alumno el procedimiento y después de plantea un ejercicio con 3 sistemas.

3. **Problemas para resolver con sistemas de ecuaciones.**

   El tema principal de estas 24 actividades son la resolución de problemas, dichos problemas se encuentran organizados por dificultad.

   Primero, los 9 problemas fáciles 4 de ellos son problemas de números y los otros 5 situaciones reales, de los cuales 3 de ellos son para hallar los precios de objetos como café y refresco, o melón y sandía, etc.

   Después se encuentran 11 problemas considerados de nivel intermedio, entre los que se encuentran problemas de artículos rebajados, problemas tipo de edades entre dos familiares, problemas de granjas en los que contar cabezas y patas o problemas para vallar una parcela. También, entre los 11 problemas, uno de ellos es un problema de mezclas.

   Por último, se encuentran 5 problemas difíciles, 4 de ellos son problemas con velocidades, en los que hay que tener en cuenta distancias y tiempo. Y el otro problema se plantea un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, véase en la Imagen 7.

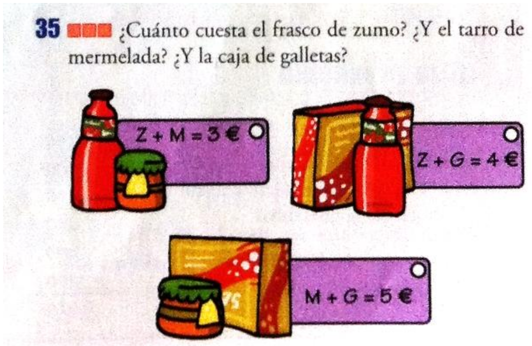


Imagen 7: Problema 35 del libro de texto.

5.2.4. Desarrolla tus competencias

Este último apartado está dividido en 4 partes:

1. **Infórmate e investiga**

   'Un sistema especial', así se titula la siguiente actividad en la cual se demuestra cómo obtener el sistema de los ejes de coordenadas. Y después se plantea un ejercicio de 3 sistemas de ecuaciones con peculiaridades y 3 representaciones gráficas para que el alumno asocie que gráfico corresponde a cada sistema.

2. **Utiliza tu ingenio**

   'Cada letra, una cifra' dónde se plantea a los alumnos un ejercicio diferente a los vistos anteriormente.

   Se les da una suma con letras, y se dice que cada letra corresponde a una cifra, y tienen que dar al menos 3 soluciones posibles.

El alumno tiene que analizar varias cuestiones para poder resolverlo:

- Si le están pidiendo más de una solución posible, el sistema será compatible indeterminado. Por lo tanto, tendremos más incógnitas que ecuaciones.
- Si cada letra es una cifra, cada letra será una incógnita, como hay 6 letras diferentes tendremos 6 incógnitas, ‘u’ ‘n’ ‘o’ ‘s’ ‘e’ ‘i’. Se puede plantear las siguientes ecuaciones:

$$6*o = s$$
$$6*n = i$$
$$6*u = se$$
$$6*(uno) = seis$$

El alumno tendrá que resolver este sistema.

3. **Tantea, experimenta, prueba.**
‘Fichas de dominó’ se plantean cuestiones con el juego de dominó.

4. **Autoevaluación**
‘Reflexiona sobre tu aprendizaje’, se les plantea 4 preguntas sobre los temas tratados en clase y según cómo responde el alumno verá si lleva el tema bien o no. Se les pregunta por ejemplo ‘¿Resuelves gráficamente sistemas de ecuaciones lineales?’ ‘¿Conoces y aplicas métodos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones?’
‘Verifícalo resolviendo ejercicios’ es un conjunto de 7 actividades que engloban todo el temario, uno de ellos representación gráfica, 3 para resolver un sistema por cada uno de los métodos algebraicos y 2 problemas.

Se puede ver en el Anexo A la Unidad Didáctica del libro de texto analizada en este capítulo.

5.3. Otros aspectos relevantes

A parte del libro de texto, los alumnos disponen de material complementario, un CD-ROM, en el cual se amplían las explicaciones, actividades y problemas, la autoevaluación, etc. En el libro de texto viene marcado cuando puedes acceder al CD-ROM.

Una ausencia a tener en cuenta en el libro de texto utilizado es un breve resumen al final del temario para que sirva al alumno cómo esquema global.

Capítulo 6

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En este capítulo se enumeran las posibles dificultades y los errores frecuentes que suelen cometer los alumnos de 2º de E.S.O. en el proceso de estudio de los sistemas de ecuaciones.

6.1. Dificultades

- Identificar cuál es el método más adecuado para resolver un sistema de ecuaciones. No siempre lo resuelven por el método que más simplifique los cálculos para evitar errores en las cuentas.
- Realizar un equilibrio entre dos miembros cuando tienen que plantear ellos las ecuaciones.
- Muchos de los alumnos no se plantean que les está preguntando el problema y luego realizan una interpretación incorrecta de la solución.
- Entender que la representación gráfica es un método más y que en los casos de ecuaciones con dos incógnitas con ella se obtiene las soluciones del sistema.
- Comprender que la solución obtenida tiene que cumplir las dos ecuaciones dadas. Y en el caso de representarlo gráficamente el punto de corte es la solución para el sistema porque es una solución que coincide para las dos ecuaciones de las infinitas soluciones que tienen cada una de ellas.
- Identificar si un sistema es compatible determinado o incompatible gráficamente.
- A los alumnos les resultó difícil plantear ecuaciones cuando el problema les daba datos de distintas unidades. No deben crear igualdades absurdas en unidades. Por ejemplo, ‘Un fabricante de jabones envasa 550 kg de detergente en 200 paquetes, unos de 2 kg y otros de 5 kg. ¿Cuántos envases de cada clase utiliza?’
- En el método de reducción a veces realizan una mezcla de las dos variantes existentes. La primera opción es realizar una suma de las dos ecuaciones y que los coeficientes de la incógnita que quiero que desaparezca sean contrarios. O la segunda opción, realizo una resta de las dos ecuaciones y que los coeficientes de la incógnita sean iguales.

  No comprendían que estas dos opciones eran iguales, porque la diferencia está en que en una de ellas realizo una ecuación equivalente multiplicada por -1.

6.2. Errores y su posible origen

- Los alumnos que no sabe representar gráficamente una ecuación puede ser por no ubicar correctamente los puntos en el eje de coordenadas, a veces confunden los ejes y cambian el de abscisas por el de ordenadas o porque utilizan diferente escala en un mismo eje como se muestra en la imagen 8.

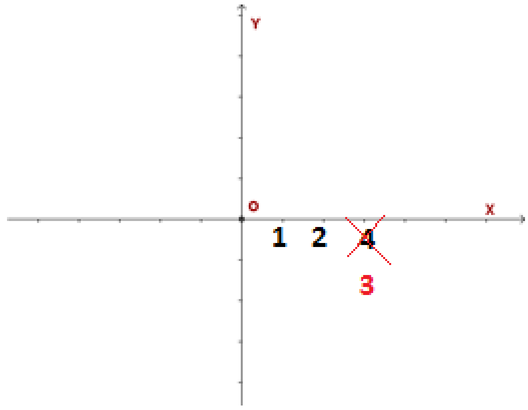


Imagen 8: Eje de ordenadas mal escalado.

- Los alumnos tienden a cometer diversos errores de cuentas. Por ejemplo uno de ellos es cambiar el signo cuando pasan de un miembro a otro al coeficiente que multiplica o divide a la incógnita.
- No conocer conceptos básicos de geometría que pueden aparecer en un problema, por ejemplo perímetro de un rectángulo o área de un triángulo, etc.
- Errores en la resolución de los métodos:
    - En el método de sustitución en alguna ocasión utilizan la misma ecuación para despejar una de las incógnitas y para sustituir la incógnita despejada, llegando a una igualdad de 0=0.
    - En el método de igualación demuestran que resuelven el sistema de forma mecánica sin darse cuenta que $-y \neq y$. En esa igualdad no existe un equilibrio entre los dos miembros si le damos un valor concreto a la y por ejemplo 5, $-5 \neq 5$.
    - En el método de reducción, dónde el alumno tiene que hacer una resta entre dos ecuaciones, suelen aplicarlo bien para la incógnita que quieren que desaparezca pero no para el resto de la igualdad. Este error puede ser debido a que no saben realizar una ecuación equivalente a la dada correctamente.

Capítulo 7

El proceso de estudio

En este capítulo se describe el proceso de estudio llevado a cabo con dos grupos de 2º E.S.O. en un instituto, sobre los sistemas de ecuaciones. Primero, se explicará la distribución de la materia, a continuación las actividades planteadas fuera del libro de texto y por último las tareas.

7.1.Distribución del tiempo de la clase

La distribución del tiempo es la misma para los dos grupos de alumnos. Todas las sesiones se realizaron en el aula de clase habitual de los alumnos, excepto la última sesión que se realizaron en la sala de informática con el programa de Geogebra. La distribución del tiempo cuenta con 4 sesiones por semana, durante 3 semanas. Cada sesión es de 55 minutos.

En general, cada sesión se dividía en tres grandes bloques:

- **Repaso:** Profesor- Alumno entablan una conversación de preguntas y respuestas sobre los temas dados anteriormente.
- **Teoría:** El profesor es el responsable en esta parte de la clase, explica a los alumnos los temas a tratar en la sesión correspondiente.
- **Práctica:** Con una serie de ejercicios el alumno es el responsable de resolverlos con ayuda de lo explicado en clase y por la investigación de uno mismo.

Los tiempos están estimados en general, según la dificultad del tema o la actitud de los alumnos, su predisposición para trabajar, etc., se dedicaba más tiempo a una actividad o a otra. Durante la práctica los alumnos podían trabajar de forma individual o con otro compañero.

Bloque	Tiempo estimado aprox.	Tipo de docencia
Repaso	5-10 min	Dialógica
Teoría	15-20 min	Magistral
Práctica	35-40 min	Constructivista

Tabla 19: Distribución general de las sesiones.

Como se puede observar en la distribución del tiempo mostrada a continuación, no todas las sesiones disponen de los tres bloques. Por ejemplo, el día previo al examen, se realizó repaso y práctica, pero no se dio ningún tema nuevo de teoría.

La distribución del tiempo de clase es la siguiente:

Sesión	**Fecha**	**Tema**
1	4 Abril	Ejercicio previo: Garaje
2	5 Abril	1. Introducción, conceptos previos 2. Método de sustitución
3	7 Abril	3. Método de igualación
4	8 Abril	4. Método de reducción
5	11 Abril	Ejercicios
6	12 Abril	Ejercicios
7	14 Abril	5. Problemas de mezclas
8	15 Abril	6. Representación gráfica y casos especiales
9	18 Abril	Repaso examen
10	19 Abril	EXAMEN
11	21 Abril	Corrección examen
12	22 Abril	7. Geogebra
		8. Método de Gauss

Tabla 20: Distribución del tiempo de clase.

7.2.Actividades adicionales planificadas

7.2.1. Ejercicio previo al tema

A parte de las actividades propuestas del libro, el primer día se realizó un ejercicio previo al tema con el objetivo de introducir los sistemas de ecuaciones de forma constructivista, este ejercicio está incluido en el Anexo B.

7.2.2. Geogebra

Después de realizar el examen, se realizó una sesión en la sala de informática con el programa Geogebra, con el objetivo de que los alumnos conociesen este software matemático.

Se vio como el programa trazaba las ecuaciones lineales de los sistemas y entre todos se interpretaban los puntos de corte. Además, esta sesión sirvió también como introducción al tema de las funciones.

7.2.3. Actividad teórico-práctica del método de Gauss

Se les ha entregado a los alumnos un guión de la teoría dada en clase para que pudiesen seguirla con mayor facilidad. En esta hoja se ven conceptos fuera del currículo del curso de 2º ES.O. pero se quieren tratar para la experimentación que se explicará en el siguiente capítulo.

El guión se puede ver en el Anexo C, en él se encuentra la breve explicación sobre matrices, la introducción del método de Gauss como método para la resolución de sistemas de ecuaciones, ejemplo visto en clase y el ejemplo planteado.

7.3. La tarea: actividad autónoma prevista de los alumnos

Sesión	Tipo	Objetivo
1	Cuestión	Interpretar la gráfica obtenida en clase y dar una solución final al problema.
2	Ejercicios	Practicar el método visto en clase de forma individual.
3	Ejercicios	Practicar el método visto en clase de forma individual.
5	Ejercicio	Asimilación de los 3 métodos analíticos.
6	Problemas	En clase hemos planteado los sistemas de ecuaciones de varios problemas, ya que es donde suelen cometerse los errores, y los alumnos en casa tienen que resolver los sistemas para seguir practicando los métodos de resolución.
7	Ejercicio	Ejercicio para resolver gráficamente varios sistemas de ecuaciones. Dos de los sistemas planteados son casos especiales, en uno se obtiene un sistema incompatible y en otro un sistema compatible indeterminado. Aunque la teoría se verá en la siguiente sesión, el alumno puede realizar una docencia constructivista en la interpretación de las soluciones gráficas de estos sistemas.
8	Ejercicios y Problemas	Serie de ejercicios y problemas para que el alumno pueda repasar el tema y practicar actividades tipo del examen.
9	Estudio	Estudio general del tema para el examen.

Tabla 21: La tarea: actividad autónoma prevista de los alumnos.

Capítulo 8
Experimentación

En este capítulo se describe la experimentación realizada con los alumnos de 2º de E.S.O., se presenta la muestra y se describe la hipótesis de partida, el cuestionario realizado, los comportamientos esperados de cada ejercicio y por último se exponen los resultados obtenidos.

8.1. Muestra y diseño de la experimentación

La muestra que se toma para realizar este experimento son dos grupos de 2º de E.S.O., a partir de ahora en adelante los distinguiremos como Grupo A y Grupo B.

El Grupo A es una clase de 19 alumnos y en el Grupo B hay 17 alumnos. Estos alumnos son por lo general de 14 años, aunque hay excepciones de alumnos con un año superior e incluso de dos años superiores.

Ambos grupos no destacan por ser de un nivel excepcional, en el resto de evaluaciones la valoración es media, ni buena ni mala, aunque por lo general el Grupo B obtiene peores calificaciones en comparación con el Grupo A.

En el Grupo A hay dos chicas que destacan de forma sobresaliente con respecto al resto del grupo y un chico al que se le realiza un examen de mínimos. De la misma forma, en el Grupo B hay dos chicos que destacan de forma notable, y dos chicos que requieren un examen de mínimos. Los alumnos a los que se les realiza un examen de mínimos es porque el año anterior se encontraban en un Programa de Refuerzo, Orientación y Apoyo (PROA), este examen tiene actividades iguales al examen ordinario, en otras actividades el enunciado es el mismo pero se aporta alguna ayuda, por ejemplo una imagen o una tabla, y otras actividades del examen ordinario quedan eliminadas por la dificultad y se plantea otro tipo.

El diseño del experimento es un cuestionario únicamente sobre el tema de sistemas de ecuaciones, el cual engloba todo lo visto en clase de forma variada, incluyendo cuestiones, ejercicios y problemas. Este cuestionario se evalúa sobre 10 puntos repartidos en 8 actividades.

Por otro lado, la experimentación se completó con una sesión extraordinaria, realizada después del cuestionario. En esta sesión se intentó introducir la notación matricial de los sistemas presentándoles el método de Gauss-Jordan (Anexo C). Para determinar cuál había sido el nivel de comprensión de esta nueva herramienta, se les planteó resolver el mismo sistema de ecuaciones que en uno de las actividades del cuestionario sin ayuda del docente. Esto nos permite comparar resultados y analizar cómo se defiende el alumno en cada uno de los métodos.

8.2. El cuestionario

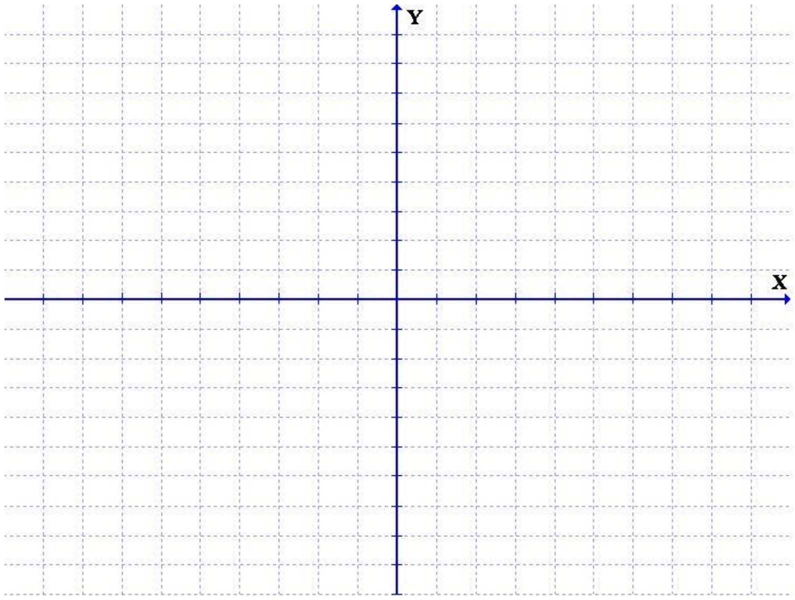
1.-(1 punto). Teoría.

a) Define ecuación lineal, indica la forma general y pon un ejemplo.

b) Indica cuántas soluciones tiene una ecuación lineal, y qué forman cuando se trasladan las soluciones a un sistema de ejes coordenados.

2.-(1,5 puntos). Resuelve gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=-5 \end{cases}$$



3.-(1 punto). Resuelve el siguiente sistema por el método de sustitución:

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-2y=12 \end{cases}$$

4.-(1 punto). Resuelve el siguiente sistema por el método de igualación:

$$\begin{cases} 3x-y=5 \\ -2x+2y=2 \end{cases}$$

5.-(1 punto). Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción:

$$\begin{cases} 5x+3y=-1 \\ 2x-5y=12 \end{cases}$$

6.- (1,5 puntos). En un rectángulo sabemos que la altura es 2 cm menor que la base, y el perímetro mide 20 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo.

7.- (1,5 puntos). En la libreta de un camarero de una cafetería del Casco Viejo, podemos leer las siguientes anotaciones:

Mesa A: 2 cafés y 4 zumos
Mesa B: 3 cafés y 2 zumos

A la mesa A le cobran 10 € y a la mesa B le cobran 7 €. ¿Cuánto cuesta el café en esta cafetería? ¿Y cuánto cuesta el zumo?

8.- (1,5 puntos). Este fin de semana quiero preparar una paella, para ello voy a mezclar dos tipos de arroz. Arroz tipo A que cuesta 5€/kg y el arroz de tipo B que cuesta 3€/kg. ¿Qué cantidad tengo que poner de cada tipo de arroz si quiero conseguir una mezcla total de 20 kg a 4,2 €/kg?

8.3. Cuestiones y comportamientos esperados

Los objetivos del cuestionario visto en el apartado anterior son:

- Conocer de forma teórica los conceptos de ecuación lineal.
- Saber representar gráficamente el sistema de ecuaciones, dando una tabla de valores, e interpretar la solución que se obtiene en la gráfica.
- Resolver tres ejercicios de sistemas de ecuaciones mediante un método de resolución dado, distinto en cada caso, para comprobar que son capaces de utilizar cualquiera de ellos.
- Se plantean tres problemas de la vida cotidiana, con el fin de que el alumno realice los 4 pasos para la resolución de problemas en cada uno de ellos:
    1. Identificar las incógnitas del enunciado.
    2. Plantear las ecuaciones del sistema.
    3. Por el método que crean el más adecuado para las ecuaciones lineales obtenidas, resolver el sistema.
    4. Interpretar la solución.

A continuación, vamos a analizar los comportamientos esperados de los alumnos en cada actividad.

Actividad 1: Teoría

Estas cuestiones de teoría se proponen porque el alumno no suele dedicar tiempo a comprender conceptos teóricos. En general, aproximadamente un 90% del tiempo de estudio lo dedica a resolver ejercicios, muchas veces de forma mecánica.

Aunque se les avisó de que habría una pregunta teórica en el cuestionario, no se espera que todos los alumnos contesten bien, es más ni la mitad de la clase hará bien la pregunta de teoría.

Es posible que los alumnos identifiquen erróneamente los conceptos de ecuación lineal y sistema de ecuaciones.

Actividad 2: Representación gráfica

Se da una plantilla de ejes coordenados para que exista un orden en el ejercicio y el alumno no dedique tiempo de examen a realizar esa parte.

El alumno debe saber que la representación de una ecuación lineal es una recta (pregunta de teoría de la actividad 1b) y por tanto, con realizar una tabla de valores con 2 soluciones es suficiente, pero para aquellos alumnos que no tienen regla ubiquen mejor la recta 3 soluciones sería lo correcto.

Una vez representadas las dos ecuaciones lineales del sistema en el eje de coordenadas, el alumno tiene que interpretar la solución, dando como respuesta al sistema el punto de corte entre las dos rectas.

Actividades 3, 4 y 5: Ejercicios sobre sistema de ecuaciones

Estos tres ejercicios tienen un objetivo común: Que el alumno resuelva el sistema de ecuaciones propuesto por el método analítico indicado. Así se comprueba si el alumno sabe utilizar los tres métodos y no solo se aprende uno de ellos.

El alumno debe resolver el ejercicio de la misma forma vista en clase, realizando los diversos pasos, no pueden dar la solución directamente. Y es muy importante que indiquen cuáles son los valores finales de x e y.

Actividad 6: Problema

Esta actividad es un problema como los vistos en clase pero cambiando los datos.

Es posible, que por no leer bien la parte del problema que dice: ‘sabemos que la altura es 2 cm menor que la base’, e interpreten mal el enunciado, y como consecuencia planteen mal una de las ecuaciones. De hecho, que con este tipo de enunciados no suelen realizar correctamente el equilibrio de la ecuación a plantear, por ejemplo con el enunciado del problema, se espera que alguno de los alumnos le reste 2cm a la altura por leer ‘la altura es 2 cm menor…’ sin pararse a pensar que en realidad lo que tiene que hacer es sumar 2 cm a la altura para que se exista el equilibrio entre la base y la altura.

La otra ecuación a plantear del sistema es la del perímetro, si el alumno conoce que es la suma de todos los lados, seguro que la plantea bien.

Para resolverlo, aunque pueden elegir cualquiera de los 3 métodos vistos en clase, el problema está pensado para usar el método de sustitución, una de las incógnitas aparece directamente en función de la otra. Si utiliza el método de igualación aparecen cocientes y, con el método de reducción tienen que multiplicar una de las ecuaciones para poder reducirla después.

Actividad 7: Problema

Este problema debería resultarles sencillo, porque es muy parecido a los problemas tipo vistos en clase y porque los datos del problema están indicados por apartados, que serán los que deben aparecer en las ecuaciones que tienen que plantear.

Se enuncia el problema como si fuese de la vida cotidiana de alguien que vive en Pamplona: 'una cafetería del Casco Viejo'.

Está pensado para que usen el método de reducción, ya que por los otros dos métodos aparecen cocientes, pero no se exige resolverlo por este método en concreto.

Actividad 8: Problema de mezclas

Este problema también es problema de mezclas como los resueltos en clase. El enunciado está planteado como si fuese un problema real: 'Este fin de semana quiero preparar una paella…'

Aunque pueden escribir las ecuaciones directamente, en clase hemos visto cómo trasladar los datos del enunciado a una tabla y luego plantear las ecuaciones, por eso se espera que el alumno represente los datos en una tabla ordenada.

El método más sencillo para resolverlo es sustitución o reducción, por el método de igualación aparecen cocientes y esto crea más confusión al alumno, aunque el alumno puede elegir el método que considere más conveniente para hallar la solución del sistema.

En los problemas, se espera que haya alumnos que olviden realizar alguno de los 4 pasos necesarios para su resolución e interpretación. Los alumnos suelen identificar las incógnitas pero realizan una mala representación simbólica de lo que quieres hallar.

Por ejemplo, en el problema 7, si un alumno indica $\begin{matrix} x = café \\ y = zumo \end{matrix}$, se considera que las incógnitas están bien identificadas pero en la solución obtendrá $\begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix}$, su interpretación será un café y dos zumos. Esto no resolverá la pregunta del problema que es el precio de estos productos, por tanto el alumno tiene que indicar: $\begin{matrix} \text{x = precio del café (€)} \\ \text{y = precio del zumo (€)} \end{matrix}$ y de esta forma la solución de $\begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix}$ responde a la pregunta; el café cuesta un euro y el precio del zumo 2 euros. Es importante que los alumnos se planteen ¿qué quieren averiguar? ¿Qué les pregunta el problema?

De manera general, se espera que los alumnos comentan algún fallo en las cuentas haciendo que se obtengan resultados erróneos o que hacer las cuentas les lleve más tiempo de lo pensado.

También, para que el alumno evite cuentas laboriosas, se recomendó dedicar unos segundos a decidir que método iba a utilizar para resolver el sistema. Por ejemplo, si al despejar una incógnita, obtengo cocientes y esto a su vez me llevará a sacar denominador común en la ecuación, deberían pensar si es posible usar otro método para que las cuentas resulten más simples.

Se indicó a los alumnos que todos los sistemas tenían soluciones enteras, aún así se espera que algún alumno obtenga soluciones no precisas. Además, saben que en un sistema se puede comprobar si la solución cumple las dos ecuaciones planteadas.

8.4. Resultados

	1. (1punto)	2. (1,5puntos)	3. (1punto)	4. (1punto)	5. (1punto)	6. (1,5puntos)	7. (1,5puntos)	8. (1,5puntos)	Nota
A1	0	0,7	0,4	0,3	1	0,5	1,5	1,4	5,8
A2	0,6	0,7	0,9	0,2	0,1	1,2	0,8	0	4,5
A3	0	0	0,4	0,1	0,1	0,5	0,8	1	2,9
A4	0	1,4	1	0,4	1	1,5	1,5	1,5	8,3
A5	0	0,1	1	0,1	0,5	1,2	1,4	0,6	4,9
A6	0,7	1,4	1	0,2	1	0,3	1,5	1,4	7,5
A7	0	0,4	0	0	0,1	0,1	0,9	0,4	1,9
A8	0	1,5	1	0,2	1	1,2	0,8	0,1	5,8
A9	0	0	1	0	0	0,1	1,1	0,3	2,5
A10	0,2	0,4	1	0	1	0,1	1,1	1,4	5,2
A11	0,5	1,4	0,4	0,4	0,6	1,4	1,5	0,1	6,3
A12	0	0,2	0	0	0,2	0,1	1,4	0	1,9
A13	0,8	1,5	1	1	1	1,5	1,5	1,5	9,8
A14	0,4	0	1	0,8	0	0	0	0	2,2
A15	0	0	0,4	0,2	0,1	0	1,1	0	1,8
A16	0,2	1,3	0,9	0,2	0,6	0,1	1,2	1,4	5,9
A17	0,2	1,5	1	1	1	1,5	1,5	1,5	9,2

Tabla 22: Resultados del cuestionario - alumnos del Grupo A.

	1. (1punto)	2. (1,5puntos)	3. (1punto)	4. (1punto)	5. (1punto)	6. (1,5puntos)	7. (1,5puntos)	8. (1,5puntos)	Nota
A1	0,8	1,5	0,9	1	1	0,7	0,7	0,8	7,4
A2	0,5	1,4	0,6	0,2	0,6	0,5	1,4	1,5	6,7
A3	0,4	0,1	0,1	0,3	0	0,2	1,4	0,7	3,2
A4	0	0	0,9	0,2	0	0	0,8	0,3	2,2
A5	0,2	0,6	0	0,4	0	0	0	0	1,2
A6	0,8	0	1	0,4	0,6	1,3	1,4	1,4	6,9
A7	0,3	0,2	1	0,4	0,2	0	0,2	0,1	2,4
A8	0,2	0,7	1	0,1	1	0,1	1,5	0,4	5
A9	0,4	0,7	0	0,2	0,5	0,2	1,5	0,3	3,8
A10	0,6	1,4	0,4	1	1	1,3	1,4	1,3	8,4
A11	0	0	0,2	0,4	0,5	0,3	0	0	1,4
A12	0,3	1,1	1	0,3	0,5	0,6	1,5	0,5	5,8
A13	0,9	1,5	0,4	1	1	1,4	1,5	1,1	8,8
A14	0,3	1,5	0	0,4	0,2	0,2	0,2	0,2	3
A15	0	1,5	0,9	0	0,1	0,5	0,9	0	3,9

Tabla 23: Resultados del cuestionario – alumnos del Grupo B.

8.4.1. Análisis global de los resultados del cuestionario

En las siguientes tablas se realiza una clasificación de los resultados obtenidos en el cuestionario por grupos. El número de la tabla indica el número de alumnos que han obtenido un resultado en el siguiente rango calificativo:

- Suspendido: engloba resultados entre el 0 y 4,9 ambos incluidos.
- Suficiente: engloba resultados entre el 5 y 5,9 ambos incluidos.
- Bien: engloba resultados entre el 6 y 6,9 ambos incluidos.
- Notable: engloba resultados entre el 7 y 8,9 ambos incluidos.
- Sobresaliente: engloba resultados entre el 9 y 10 ambos incluidos.

En el Grupo A son 19 alumnos, de los cuales un alumno realizó el examen de mínimos y otro alumno falto ese día a clase, por lo tanto podemos analizar 17 resultados del cuestionario. Redondeando a las decenas la media del Grupo A ha sido un 5,08.

	Suspendidos	**Suficientes**	**Bien**	**Notable**	**Sobresaliente**
Grupo A	8	4	1	2	2

Tabla 24: Clasificación de los resultados del cuestionario – Grupo A.

En el Grupo B son 17 alumnos, tenemos 15 resultados del cuestionario porque dos alumnos realizaron el examen de mínimos. La media, redondeando a las decenas, en el Grupo B ha sido 4,67.

	Suspendidos	**Suficientes**	**Bien**	**Notable**	**Sobresaliente**
Grupo B	8	2	2	3	0

Tabla 25: Clasificación de los resultados del cuestionario – Grupo B.

8.4.2. Análisis especifico de las actividades del cuestionario

Tras haber realizado un análisis global de los resultados del cuestionario por grupos, se va a realizar un análisis por actividades.

La clasificación que se llevará en las actividades será:

- Aprobado: si obtienen un valor igual o superior a la mitad de la puntuación máxima de la actividad.
- Suspendido: si el valor obtenido es inferior a la mitad de la puntuación máxima de la actividad.

	Act. 1	**Act. 2**	**Act. 3**	**Act. 4**	**Act. 5**	**Act. 6**	**Act. 7**	**Act. 8**
Aprobados Grupo A	4	7	11	3	10	7	16	8
Aprobados Grupo B	5	7	8	3	9	3	10	5
Aprobados Total	9	14	19	6	19	10	26	13

Tabla 26: Clasificación de los resultados por actividades del cuestionario.

Además, se enumeran y se describen unas variables concretas elegidas para cada actividad, con el fin de que dichas variables ayuden el análisis de las actividades realizadas en el cuestionario. Se representan los resultados por tablas, indicando 1 si se cumple la variable, 0 si no la cumple y un punto (.) si la respuesta no ha sido respondida.

Actividad 1: Teoría

Las variables de estas cuestiones son:

- V1: Tiene conocimiento teóricos sobre el tema (min 60%).
- V2: Responde a otra cuestión distinta a lo preguntado.
- V3: Confunde sistema de ecuaciones con ecuación lineal.

Grupo A	**V1**	**V2**	**V3**
A1	0	1	1
A2	1	0	0
A3	0	0	1
A4	0	1	.
A5	0	1	1
A6	1	0	0
A7	0	1	.
A8	0	1	.
A9	.	.	.
A10	0	0	0
A11	0	1	1
A12	0	1	.
A13	1	0	0
A14	0	0	0
A15	0	1	.
A16	0	0	0
A17	1	0	0
Total	4	8	4

Grupo B	**V1**	**V2**	**V3**
A1	1	0	0
A2	0	0	0
A3	0	1	.
A4	0	0	0
A5	0	1	1
A6	1	0	0
A7	0	0	0
A8	0	1	.
A9	0	1	.
A10	1	0	0
A11	0	1	.
A12	0	0	0
A13	1	0	0
A14	0	1	.
A15	0	1	.
Total	4	7	1

Tabla 27: Análisis de la actividad 1 del cuestionario.

- Un 25% de los 32 alumnos tiene conocimientos teóricos sobre el tema preguntado, 4 de 17 alumnos en el Grupo A y 4 de 15 alumnos en el Grupo B.
- Un 47 % ha respondido otra pregunta, de los cuales un 16 % corresponden a los alumnos que han confundido las cuestiones sobre ecuación lineal por cuestiones sobre sistema de ecuaciones.
- Un alumno del Grupo A es el único que deja la pregunta de teoría sin contestar, el resto intentan responder a alguna cuestión.

Actividad 2: Representación gráfica

Las variables de este ejercicio son:

- V1: Sabe representar los datos en una tabla.
- V2: Completa la tabla de datos con un número correcto de posibles soluciones de la ecuación lineal.
- V3: Sabe ubicar los puntos de la tabla de datos en la gráfica.
- V4: Interpreta correctamente la solución obtenida en la gráfica.
- V5: Alargan las rectas, sabiendo que las soluciones no van sólo desde los puntos dados sino que todos los puntos de esa recta son soluciones de la ecuación lineal.

A	**V1**	**V2**	**V3**	**V4**	**V5**
A1	1	1	0	1	0
A2	1	1	1	0	1
A3	1	1	0	.	1
A4	1	1	1	1	1
A5	1	0	1	1	0
A6	1	1	1	0	0
A7	0	.	.	.	.
A8	1	1	1	1	1
A9	.	.	.	.	.
A10	1	1	0	0	0
A11	1	1	1	0	1
A12	1	0	.	.	0
A13	1	1	1	1	1
A14	.	.	.	.	.
A15	0	.	.	.	.
A16	1	1	0	1	1
A17	1	1	1	1	1
Total	13	11	8	7	8

B	**V1**	**V2**	**V3**	**V4**	**V5**
A1	1	1	1	1	1
A2	1	1	1	0	1
A3	1	1	0	0	0
A4	0	.	.	.	.
A5	1	1	0	.	.
A6	0	.	.	.	.
A7	1	0	0	.	.
A8	1	1	1	0	1
A9	1	1	1	0	1
A10	1	1	1	0	1
A11	1	1	0	.	.
A12	1	1	0	.	1
A13	1	1	1	1	1
A14	1	1	1	1	1
A15	1	1	1	1	1
Total	13	12	8	4	9

Tabla 28: Análisis de la actividad 2 del cuestionario.

- La mayoría de los alumnos (26 de 32 alumnos) sabe realizar una tabla de datos, y de estos 26 sólo 3 han dado más de 3 valores.
- El 50% del total de los alumnos sabe ubicar los puntos de la tabla de datos en los ejes de coordenadas.
- En el grupo B la mitad de los alumnos que llegan a representar las dos ecuaciones, interpretan mal la solución final del sistema.
- Prácticamente todos los que han representación gráficamente una recta alargan la línea.

Actividad 3: Ejercicio sistema de ecuaciones – Método sustitución

Actividad 4: Ejercicio sistema de ecuaciones – Método igualación

Actividad 5: Ejercicio sistema de ecuaciones – Método reducción

Estos tres ejercicios tienen la misma estructura, por tanto se analizan las mismas variables:

- V1: Ha aplicado correctamente el método indicado en el enunciado.
- V2: Esta bien resuelto el ejercicio, sin errores en las cuentas.

	Actividad 3		Actividad 4		Actividad 5	
A	**V1**	**V2**	**V1**	**V2**	**V1**	**V2**
A1	1	0	1	0	1	1
A2	1	0	1	0	1	0
A3	1	0	0	0	1	0
A4	1	1	1	0	1	1
A5	1	1	0	0	1	0
A6	1	1	1	0	1	1
A7	1	0	0	0	1	0
A8	1	1	1	0	1	1
A9	1	1	0	0	0	0
A10	1	1	0	0	1	1
A11	1	0	1	0	1	0
A12	0	0	0	0	1	0
A13	1	1	1	1	1	1
A14	1	1	1	0	0	0
A15	1	0	1	0	1	0
A16	1	1	0	0	1	0
A17	1	1	1	1	1	1
Total	16	10	10	2	15	7

	Actividad 3		Actividad 4		Actividad 5	
B	**V1**	**V2**	**V1**	**V2**	**V1**	**V2**
A1	1	1	1	1	1	1
A2	1	0	1	0	1	0
A3	1	0	1	0	0	0
A4	1	1	1	0	0	0
A5	0	0	1	0	0	0
A6	1	1	1	0	1	0
A7	1	1	1	0	1	0
A8	1	1	0	0	1	0
A9	0	0	1	0	1	0
A10	1	0	1	1	1	1
A11	0	0	1	0	1	0
A12	1	1	0	0	1	0
A13	1	0	1	1	1	1
A14	0	0	1	0	1	0
A15	1	1	0	0	1	0
Total	11	7	12	3	12	3

Tabla 29: Análisis de las actividades 3, 4, 5 del cuestionario.

- Viendo los resultados de la tabla anterior, 16 alumnos del Grupo A y 11 del Grupo B, es decir, 27 alumnos de 32 (84% aprox.) conocen el método de sustitución y lo empiezan a aplicar, pero debido a errores de cuentas sólo un 53% de los 32 alumnos llegan a la solución del sistema, 10 alumnos del Grupo A y 7 del Grupo B.
- Para el ejercicio de igualación los resultados son algo peores, 22 alumnos de 32 aplican correctamente el método pero sólo llegan a la solución 5 alumnos en total, apenas un 16%.
- Al igual que el método de sustitución, el 84% de los alumnos aplican bien el método de reducción, pero los alumnos encuentran este método más engorroso ya que cometen más fallos en la resolución, 10 alumnos de 32 obtienen la solución correcta.

Actividad 6: Problema

Las variables de estas cuestiones son:

- V1: Ha identificado correctamente las incógnitas.
- V2: Plantea una buena representación simbólica de las incógnitas.
- V3: Ha planteado bien las ecuaciones del problema.
- V4: Ha obtenido la solución del sistema de ecuaciones, sin errores en las cuentas.
- V5: Interpreta la solución adecuadamente, viendo que tiene sentido la respuesta obtenida para la pregunta del problema.

A	**V1**	**V2**	**V3**	**V4**	**V5**
A1	1	0	1	0	1
A2	1	0	1	1	0
A3	1	0	0	0	0
A4	1	1	1	1	1
A5	1	1	1	0	0
A6	1	1	0	0	0
A7	1	0	0	0	0
A8	0	0	1	1	0
A9	1	0	0	0	0
A10	1	0	0	0	0
A11	1	0	1	1	1
A12	1	0	0	0	1
A13	1	1	1	1	1
A14	0	0	0	0	0
A15	.	.	.	.	.
A16	1	0	0	0	0
A17	1	1	1	1	1
Total	14	5	8	6	6

B	**V1**	**V2**	**V3**	**V4**	**V5**
A1	1	0	1	0	0
A2	1	0	0	0	1
A3	1	0	0	0	1
A4	.	.	.	.	.
A5	.	.	.	.	.
A6	1	0	1	0	0
A7	.	.	.	.	.
A8	0	0	0	0	1
A9	1	1	0	0	0
A10	0	0	1	1	0
A11	1	1	0	0	1
A12	1	1	0	0	1
A13	1	0	1	1	1
A14	1	0	0	0	0
A15	1	0	0	0	0
Total	10	3	4	2	6

Tabla 30: Análisis de la actividad 6 del cuestionario.

- 24 alumnos identifican las incógnitas del problema pero únicamente 8 de ellos las definen de forma adecuada para luego dar una buena representación simbólica de la solución.
- 12 alumnos plantean bien las ecuaciones del sistema, y 2/3 de estos alumnos resuelven sin errores el sistema y llegan a la solución del problema.
- Aunque las respuestas no fuesen las correctas, 12 alumnos interpretaban bien los resultados con respecto a las incógnitas definidas.
- 1 alumno del Grupo A dejó el problema en blanco y en el Grupo B lo hicieron 3 alumnos.

Actividad 7: Problema

Las variables de estas cuestiones son:

- V1: Ha identificado correctamente las incógnitas.
- V2: Plantea una buena representación simbólica de las incógnitas.
- V3: Ha planteado bien las ecuaciones del problema.
- V4: Ha obtenido la solución del sistema de ecuaciones, sin errores en las cuentas.
- V5: Interpreta la solución adecuadamente, viendo que tiene sentido la respuesta obtenida para la pregunta del problema.

A	V1	V2	V3	V4	V5
A1	1	1	1	1	1
A2	1	0	1	0	0
A3	1	1	1	0	0
A4	1	1	1	1	1
A5	1	0	1	1	1
A6	1	1	1	1	1
A7	1	0	1	0	0
A8	1	1	1	0	0
A9	1	0	1	0	1
A10	1	1	1	0	1
A11	1	1	1	1	1
A12	1	0	1	1	1
A13	1	1	1	1	1
A14	.	.	.	.	.
A15	1	0	1	0	1
A16	1	1	1	0	0
A17	1	1	1	1	1
Total	16	10	16	8	11

B	V1	V2	V3	V4	V5
A1	1	0	1	0	0
A2	1	0	1	1	1
A3	1	0	1	1	1
A4	1	0	1	0	0
A5	.	.	.	.	.
A6	1	0	1	1	1
A7	1	1	0	0	0
A8	1	1	1	1	1
A9	1	1	1	1	1
A10	1	0	1	1	1
A11	.	.	.	.	.
A12	1	1	1	1	1
A13	1	1	1	1	1
A14	1	1	0	0	0
A15	1	1	1	0	0
Total	13	7	11	8	8

Tabla 31: Análisis de la actividad 7 del cuestionario.

- El 90% de los alumnos identifica correctamente las incógnitas del problema, de estos 29 alumnos 17 las definen de forma adecuada para después interpretar bien la solución.
- 27 alumnos plantean bien las ecuaciones del sistema, y 16 de ellos lo resuelven correctamente, sin cometer errores en las cuentas.
- El número de alumnos que hace una correcta interpretación de la solución, dando valor a las incógnitas, es de 19.
- Un alumno de cada grupo dejó el problema totalmente en blanco.

Actividad 8: Problema de mezclas

Las variables de estas cuestiones son:

- V1: Ha identificado correctamente las incógnitas.
- V2: Plantea una buena representación simbólica de las incógnitas.
- V3: Ha utilizado la tabla para facilitar el planteamiento de las ecuaciones y trasladar los datos del enunciado.
- V4: Ha planteado bien las ecuaciones del problema.
- V5: Ha obtenido la solución del sistema de ecuaciones, sin errores en las cuentas.
- V6: Interpreta la solución adecuadamente, viendo que tiene sentido la respuesta obtenida para la pregunta del problema.

A	V1	V2	V3	V4	V5	V6
A1	1	0	1	1	1	1
A2	.	.	.	.	.	.
A3	0	0	1	1	0	1
A4	1	1	1	1	1	1
A5	1	1	1	0	0	0
A6	1	0	1	1	1	1
A7	0	0	1	0	0	0
A8	0	0	1	0	0	0
A9	0	0	1	1	0	0
A10	1	0	1	1	1	1
A11	1	0	0	0	0	0
A12	0	0	1	0	0	0
A13	1	1	1	1	1	1
A14	0	0	1	0	0	0
A15	.	.	.	.	.	.
A16	1	0	1	1	1	1
A17	1	1	1	1	1	1
Total	9	4	14	9	7	8

B	V1	V2	V3	V4	V5	V6
A1	1	0	1	1	0	1
A2	1	1	1	1	1	1
A3	1	0	1	1	0	0
A4	0	0	1	0	0	0
A5	.	.	.	.	.	.
A6	1	0	1	1	1	1
A7	0	0	1	0	0	0
A8	0	0	1	0	0	0
A9	1	0	1	0	0	0
A10	0	0	1	1	1	0
A11	.	.	.	.	.	.
A12	1	1	1	0	0	0
A13	1	0	1	1	0	0
A14	0	0	1	0	0	0
A15	.	.	.	.	.	.
Total	7	2	12	6	3	3

Tabla 32: Análisis de la actividad 8 del cuestionario.

Como se puede observar en la tabla anterior, los resultados de este problema han sido peores a los dos anteriores:

- La mitad del total de alumnos (16 alumnos) identifica las incógnitas del problema planteado, y sólo 6 definen dichas incógnitas correctamente para realizar una buena representación simbólica de la solución.
- 26 alumnos realizan una tabla para intentar trasladar los datos del enunciado y facilitar el planteamiento de las ecuaciones del sistema.
- De los 26 que realizan la tabla sólo 15 alumnos plantean bien dichas ecuaciones, de los cuales 10 obtienen la solución final correcta.
- 11 alumnos interpretan la solución que han obtenido que, aunque este mal demuestran que no se olvidan de este paso.

- Dos alumnos de cada grupo dejaron el problema sin resolver.

Actividad extraordinaria: Ejercicio sistema de ecuaciones – Método Gauss – Jordan

En este ejercicio vamos a analizar las siguientes variables:

- V1: Traslada correctamente el sistema a una matriz.
- V2: Realiza correctamente las operaciones en las matrices.
- V3: Una vez realizadas las operaciones con las filas de la matriz, y sacan una ecuación por fila, resuelven sin errores las cuentas.

Este ejercicio se realizó de forma anónima, por tanto el Alumno 1 de la siguiente tabla no corresponde al mismo alumno de las anteriores.

	V1	V2	V3		V1	V2	V3
A1	1	1	0	**A18**	1	1	1
A2	1	0	0	**A19**	1	0	0
A3	1	0	0	**A20**	1	1	0
A4	1	1	1	**A21**	1	1	0
A5	1	1	1	**A22**	0	1	0
A6	1	0	0	**A23**	0	0	0
A7	1	0	0	**A24**	1	1	1
A8	1	1	0	**A25**	1	1	0
A9	0	1	0	**A26**	0	1	0
A10	1	1	1	**A27**	1	1	1
A11	1	1	1	**A28**	1	0	0
A12	1	1	1	**A29**	1	0	0
A13	1	0	0	**A30**	1	1	1
A14	1	1	0	**A31**	1	1	0
A15	0	0	0	**A32**	1	1	1
A16	0	1	0	**A33**	0	1	0
A17	1	1	1	**A34**	1	0	0
Total	14	11	6	**Total**	13	12	5

Tabla 33: Análisis de la actividad extraordinaria.

- Aproximadamente el 80% de los alumnos ha sabido trasladar el sistema de ecuaciones dado a una matriz, el resto de han equivocado en el signo negativo que predecía a la y en una de las ecuaciones.
- De estos 27 alumnos que tenían bien la matriz inicial, 23 han realizado correctamente las operaciones de las matrices, es decir sólo 4 alumnos han cometido errores en las operaciones de las filas de una matriz.
- 11 alumnos han obtenido la solución final del sistema por el método de Gauss Jordan, casi 1/3 del alumnado.
  Teniendo en cuenta que 23 ya tenían la matriz, estos errores se han cometido en las cuentas de despejar las ecuaciones.

8.5. Discusión de los resultados

Tras haber analizado en el apartado anterior los resultados obtenidos de los alumnos, a continuación se comparan con los comportamientos que esperábamos, tratados en el apartado 8.3.

8.5.1. Discusión de los resultados globales

Con los resultados globales del cuestionario vistos en el capítulo anterior, se puede decir que las medias están muy próximas al 5 sobre 10 (5.08 en el Grupo A y 4.67 en el Grupo B), por lo tanto no se puede caracterizar por haber sido un examen difícil porque la media sería inferior, ni porque haya sido un examen fácil porque los resultados de los alumnos hubiesen sido superiores. El nivel ha sido medio, como en las evaluaciones anteriores del curso.

Con los resultados obtenidos por la clasificación de los resultados del cuestionario, se comprueba que dentro de los grupos ha habido alumnos de todo tipo.

- Hay el mismo número de suspensos en las dos clases pero, como en el Grupo B hay dos alumnos menos el porcentaje de aprobados es mayor en este grupo.
- También, en el Grupo B hay un alumno más con la calificación de notable, otro más con la calificación de bien.

Estos dos aspectos no justifican que el Grupo A tenga unas décimas más de media que el Grupo B, eso se puede explicar con los dos sobresalientes que hay en el A mientras que en el Grupo B no hay ninguno. Tal y cómo esperábamos el Grupo A ha obtenido unos resultados un poco mejores.

8.5.2. Discusión resultados por actividades

Tras analizar los resultados observamos que el ejercicio para resolver el sistema por el método de igualación (Actividad 4) y el problema del rectángulo (Actividad 6) cómo las que peores resultados han obtenido.
Y el segundo problema (Actividad 7) es el que mejores resultados ha obtenido, confirmando lo esperado cuando lo definíamos cómo problema sencillo.

Actividad 1: Teoría

Como habíamos deducido el alumno tiende a no dedicar tiempo a la parte teórica del examen y centrase más en la práctica. Pero no se dan cuenta que analizando los resultados obtenidos la actividad 2 podían contestar a varias cuestiones teóricas. Piensan que cómo no han estudiado teoría no van a saber contestarla, pero no es cuestión de estudiar sino de entender e interpretar los resultados de la parte práctica.

Un aspecto que me ha sorprendido en la Actividad 1 es que sólo 5 alumnos en total han confundido las cuestiones de ecuación lineal por sistemas de ecuaciones, pensaba que el número iba a ser mayor.

Actividad 2: Representación gráfica

Nos damos cuenta que la dificultad para la mitad de los alumnos en este ejercicio ha sido ubicar los puntos en el eje de coordenadas, un concepto que se aprende en 6º de Primaria.

De los conceptos que más se incidió en clase para las representaciones gráficas de los sistemas, prácticamente todos los alumnos lo han realizado correctamente.

Actividades 3, 4, 5 y extraordinaria: Ejercicios de sistemas de ecuaciones

El comportamiento de la mayoría de los alumnos es cómo el esperado, han resuelto el ejercicio con los pasos vistos en clase, pero muchos de ellos no llegan a la solución porque tienen errores en las cuentas.

Al poner un ejercicio de cada método hemos comprobado que los alumnos han cometido más fallos en el método de igualación que con el método de sustitución y reducción. La mayor parte de los fallos cometidos en el método de igualación son por igualar dos expresiones que diferentes. Los alumnos despejaron de una ecuación '– y' y de la otra ecuación 'y' lo igualaron, este caso viene explicado en un apartado de 'Ten en cuenta' en la sección correspondiente, véase en la imagen 5.

El mismo ejercicio del método de igualación se plantea en el ejercicio extraordinario para resolverlo por el método de Gauss–Jordan y se obtienen mejores resultados. 11 alumnos llegan a la solución final a través de las matrices, frente a 5 alumnos que resuelven correctamente el ejercicio por el método de igualación.

Las matrices no se explican hasta Bachillerato, pero las respuestas de los alumnos han sido muy positivas respecto al método de Gauss.

Actividades 6, 7, 8: Problemas

Nos sorprende que los alumnos que obtienen una solución no se olvidaban de interpretarla y dar respuesta al problema, según lo observado en clase, los alumnos tienden a olvidarse.

Al igual que en los ejercicios de resolución de sistemas, la mayoría de los alumnos no llegan a la solución correcta por errores en las cuentas.

Pero la dificultad que pensábamos que iban a tener en plantear ellos mismos las ecuaciones, vemos en los resultados que han hecho muy bien en el problema 7. En el problema 6 les ha confundido el concepto de perímetro, concepto que se ve en cursos anteriores, por tanto saber que es el perímetro no era la dificultad del problema. Y en el problema 8 aunque el 99% se apoya en una tabla para plantear las ecuaciones, sólo el 38% consigue resolverlo.

También han sabido interpretar las incógnitas del problema, pero cómo habíamos esperado no tanto para definirlas correctamente.

Síntesis, conclusiones y preguntas abiertas

Síntesis

El presente Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo realizar un estudio sobre la enseñanza de sistemas de ecuaciones a alumnos de 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria. Dicho trabajo se estructura en dos partes.

En la primera parte, se analiza el contenido de sistemas de ecuaciones presente en la normativa vigente y su reflejo en los libros de texto utilizados en las aulas de primaria y secundaria. Asimismo, se examinan los ejercicios, problemas y cuestiones tipos que aparecen en los libros de texto para que el alumno aprenda y practique los contenidos.

La segunda parte del trabajo se basa en la experiencia de la docencia impartida, dentro del Practicum II, en dos grupos de alumnos de 2º de E.S.O. En esta parte se analiza el material utilizado para las clases y el tiempo dedicado a cada contenido. También, se detallan los resultados, previstos y reales, del cuestionario llevado a cabo por los alumnos para el proceso de estudio y se realiza una discusión de los mismos. Gracias a esto y a la observación de las clases se pueden tratar las dificultades y errores frecuentes que tienen los alumnos al estudiar los sistemas de ecuaciones.

Conclusiones

Una vez finalizado el análisis de estudio sobre los sistemas de ecuaciones, se puede concluir que:

- La normativa vigente y los libros de texto presentan un desfase en la introducción de algunos contenidos. Los libros de texto se adelantan respecto a lo fijado por la normativa, esto provoca que en los libros de texto se repitan conceptos de un año para otro, por ejemplo como sucede con los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones de dos incógnitas en 2º E.S.O. y 3º E.S.O.
- Los ejercicios, problemas y cuestiones tipo planteados en los libros de texto son adecuadas para evaluar a los alumnos según los criterios de evaluación establecidos por la actual normativa.
- Por otra parte, pensando en los alumnos que puedan cursar Bachillerato o incluso acceder a Grados Universitarios, existe una gran diferencia con los contenidos tratados en la educación secundaria y Bachillerato. Por ejemplo en Educación Secundaria Obligatoria no aparece la notación matricial de un sistema de ecuaciones.
- La importancia de una buena organización del tiempo, conocer que contenidos necesitan más tiempo para que los alumnos lo asimilen y ser previsibles a dificultades y errores frecuentes.
- En los resultados del cuestionario un gran porcentaje de los alumnos comete errores de cuentas en varios de los ejercicios, esto les impide llegar al resultado final incluso conociendo el procedimiento de resolución del sistema.

Preguntas abiertas

Tras la realización de este trabajo, plateo algunas las siguientes preguntas:

- ¿Por qué los alumnos no son capaces de responder a cuestiones teóricas, conociendo la parte práctica? ¿Deberíamos reforzar más actividades de razonar, interpretar o explicar las soluciones para que mejoren esta parte?
- Hemos comprobado que el alumnado de 2º E.S.O. es capaz de trabajar con tablas de datos ordenados en filas y columna, es decir con matrices, ¿Por qué el currículo espera hasta Bachillerato para introducirlas?
- Las representaciones gráficas se pueden realizar fácilmente a través de programas de ordenador como Geogebra, ¿aun así es importante enseñar a los alumnos este tipo de resolución?

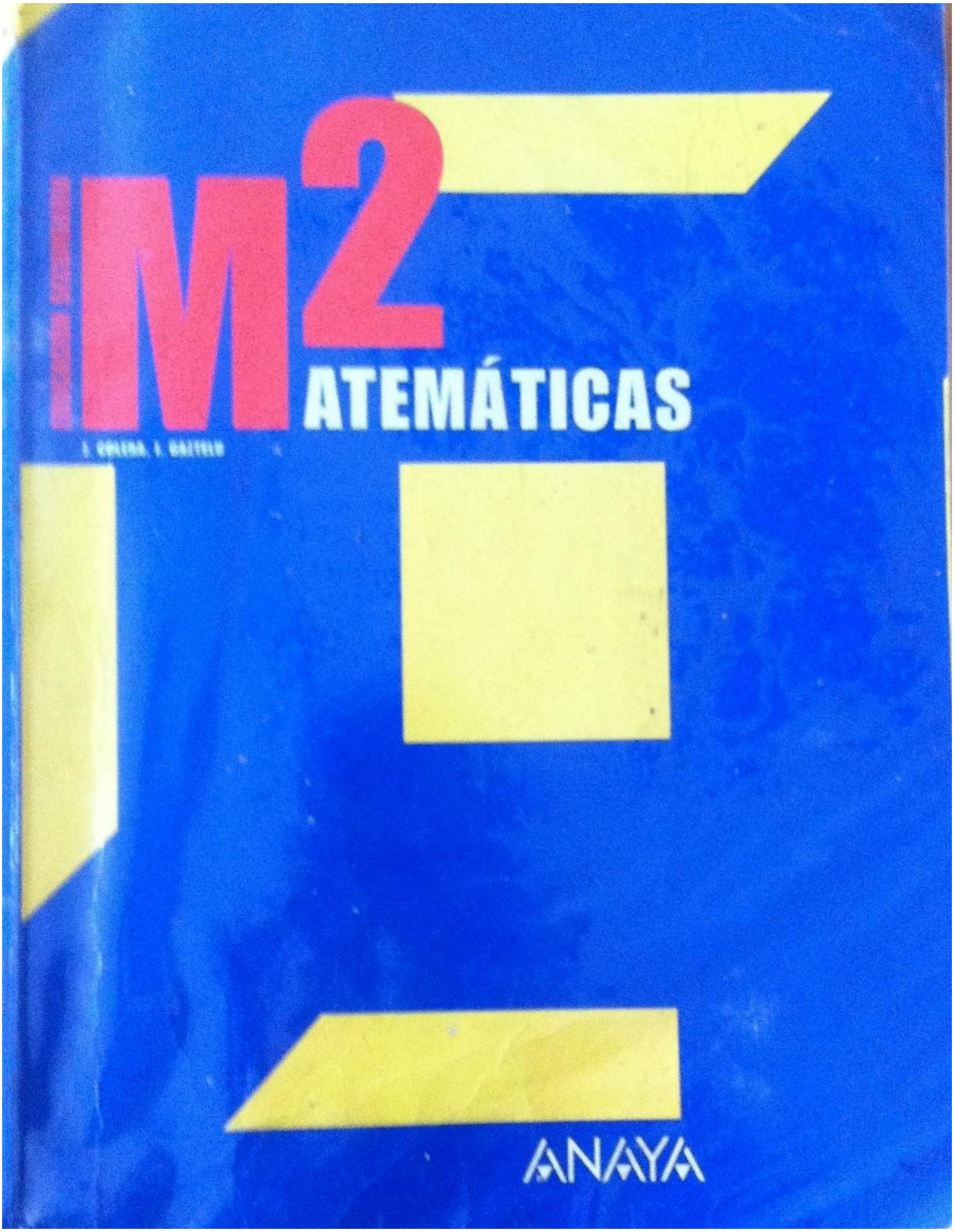
Referencias

- BOE número 293, Viernes 8 de diciembre, páginas 43095-43101. Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007a).
- BOE número 5, Viernes 5 de enero, páginas 750-760. Real Decreto 1613/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007a).
- BOE número 266, Martes 6 de noviembre, páginas 45448-45451 y páginas 45474-45477. Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007a).
- J. Colera Jiménez, I. Gaztelu Albero, (2008). Educación Secundaria Matemáticas 1. Madrid: Edición ANAYA.
- J. Colera Jiménez, I. Gaztelu Albero, (2008). Educación Secundaria Matemáticas 2. Madrid: Edición ANAYA.
- J. Colera Jiménez, I. Gaztelu Albero, (2008). Educación Secundaria Matemáticas 3. Madrid: Edición ANAYA.
- J. Colera Jiménez, I. Gaztelu Albero, (2008). Educación Secundaria Matemáticas 4 Opción A. Madrid: Edición ANAYA.
- J. Colera Jiménez, I. Gaztelu Albero, (2008). Educación Secundaria Matemáticas 4 Opción B. Madrid: Edición ANAYA.

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto
B. Actividad previa al tema
C. Actividad teórico-práctica del método de Gauss - Jordan

A. Unidad didáctica del libro de texto



7 Sistemas de ecuaciones

1 a) Calcula la edad de cada uno de los personajes que charlan en el parque.
b) ¿Qué valores de x e y cumplen simultáneamente estas dos igualdades?

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

2 a) Observa las balanzas. ¿Cuánto pesa la esfera? ¿Y la pirámide?
b) ¿Qué valores deben tomar a y b para que estas igualdades sean ciertas?

$$\begin{cases} 2a + b = 10 \\ 3a + 2b = 18 \end{cases}$$

1. Soluciones a estos problemas.

En esta unidad vas a trabajar con ecuaciones de dos incógnitas.

Varias de esas ecuaciones forman un sistema.

Los sistemas de ecuaciones te servirán, también, para resolver problemas.

Antes de comenzar, recuerda

Algunas operaciones básicas con expresiones algebraicas

Ejemplos

Para $A = 4x + 3y$ y $B = 3x - 2y$, tenemos que:

$A + B = 7x + y$ $\quad 3A = 12x + 9y$ $\quad 3A + 2B = 18x + 5y$

$A - B = x + 5y$ $\quad 2B = 6x - 4y$ $\quad 3A - 2B = 6x + 13y$

1 Dados $M = 2x + y$ y $N = x - 2y$, calcula.

a) $M + N$ y $M - N$ b) $2M$ y $2N$ c) $2M + N$ y $M - 2N$

Cómo se calcula el valor numérico de una expresión algebraica

Ejemplos

Vamos a calcular el valor numérico de $\frac{5x-3}{4}$, para $x = 1$ y para $x = 3$:

$\frac{5x-3}{4} \xrightarrow{x=1} \frac{5\cdot 1-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{5x-3}{4} \xrightarrow{x=3} \frac{5\cdot 3-3}{4} = \frac{12}{4} = 3$

2 Calcula el valor numérico de las expresiones siguientes:

a) $4x - 5$, para $x = 1$ b) $3x + 1$, para $x = \frac{1}{6}$

c) $\frac{x+5}{3}$, para $x = -2$ d) $\frac{2x-4}{6}$, para $x = 3$

Cómo se suprimen los denominadores en una igualdad algebraica

Ejemplo

Sustituimos la siguiente ecuación por otra equivalente sin denominadores:

$$\frac{a}{3} + \frac{2b}{5} = c$$

Para ello, multiplicamos ambos miembros por mín.c.m. (3, 5) = 15:

$$\frac{15a}{3} + \frac{30b}{5} = 15c \rightarrow 5a + 6b = 15c$$

3 Suprime denominadores.

a) $\frac{x}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{3}{4}$ b) $\frac{3a}{10} - \frac{b}{4} = \frac{2c}{5}$

Cómo se transponen términos en una ecuación para despejar una incógnita

Ejemplos

- Despejamos x en la igualdad $3x - 5y = 1$

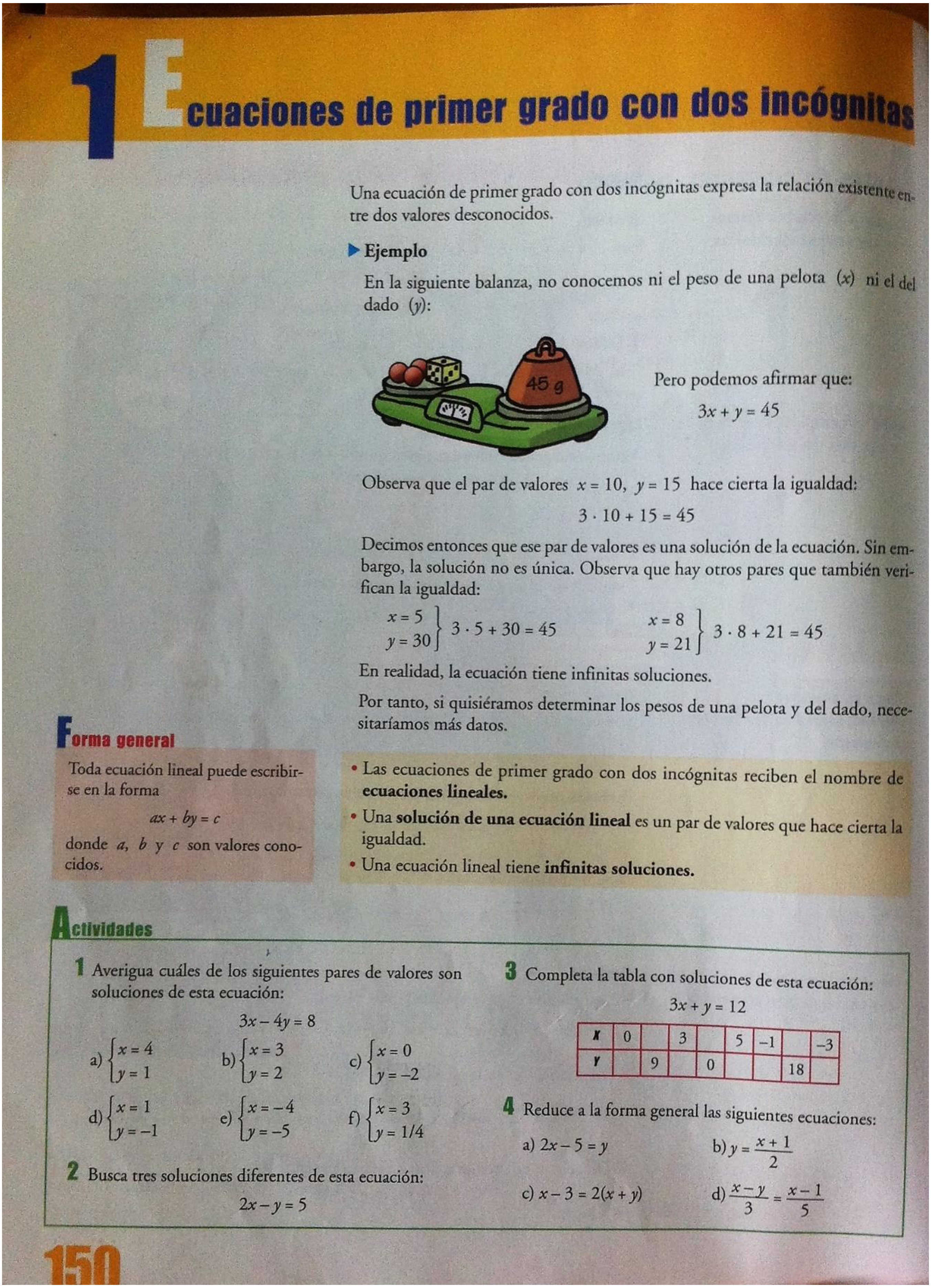
$$3x - 5y = 1 \rightarrow 3x = 1 + 5y \rightarrow x = \frac{1+5y}{3}$$

- Despejamos a en la igualdad $\frac{a}{3} + \frac{2b}{5} = c$

$$\frac{a}{3} + \frac{2b}{5} = c \rightarrow 5a + 6b = 15c \rightarrow 5a = 15c - 6b \rightarrow a = \frac{15c-6b}{5}$$

4 Despeja x en cada una de las igualdades siguientes:

a) $x + 5y = 6$ b) $2x - y = 3$ c) $\frac{x}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{3}{4}$



1 Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Una ecuación de primer grado con dos incógnitas expresa la relación existente entre dos valores desconocidos.

▶ **Ejemplo**

En la siguiente balanza, no conocemos ni el peso de una pelota (x) ni el del dado (y):

Pero podemos afirmar que:

$$3x + y = 45$$

Observa que el par de valores $x = 10$, $y = 15$ hace cierta la igualdad:

$$3 \cdot 10 + 15 = 45$$

Decimos entonces que ese par de valores es una solución de la ecuación. Sin embargo, la solución no es única. Observa que hay otros pares que también verifican la igualdad:

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 30 \end{array}\right\} 3 \cdot 5 + 30 = 45 \qquad \left.\begin{array}{l} x = 8 \\ y = 21 \end{array}\right\} 3 \cdot 8 + 21 = 45$$

En realidad, la ecuación tiene infinitas soluciones.

Por tanto, si quisiéramos determinar los pesos de una pelota y del dado, necesitaríamos más datos.

Forma general

Toda ecuación lineal puede escribirse en la forma

$$ax + by = c$$

donde a, b y c son valores conocidos.

- Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas reciben el nombre de **ecuaciones lineales.**
- Una **solución de una ecuación lineal** es un par de valores que hace cierta la igualdad.
- Una ecuación lineal tiene **infinitas soluciones.**

Actividades

1 Averigua cuáles de los siguientes pares de valores son soluciones de esta ecuación:

$$3x - 4y = 8$$

a) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1/4 \end{cases}$

2 Busca tres soluciones diferentes de esta ecuación:

$$2x - y = 5$$

3 Completa la tabla con soluciones de esta ecuación:

$$3x + y = 12$$

X	0		3		5	−1		−3
Y		9		0			18	

4 Reduce a la forma general las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 5 = y$ b) $y = \dfrac{x+1}{2}$

c) $x - 3 = 2(x + y)$ d) $\dfrac{x-y}{3} = \dfrac{x-1}{5}$

150

Representación gráfica de una ecuación lineal

Para obtener distintas soluciones de una ecuación lineal, se suele despejar una de las incógnitas y dar valores a la otra.

Los valores se recogen, ordenados, en una tabla.

Tomemos, por ejemplo, la ecuación relativa a la balanza de la página anterior:

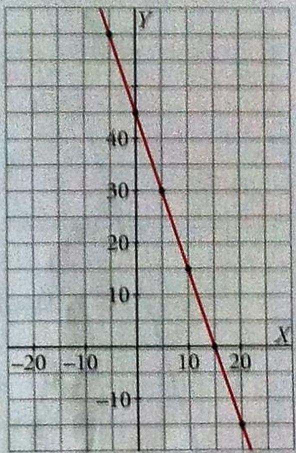
$3x + y = 45$

↓ Despejamos y.

$y = 45 - 3x$

↓ Dando distintos valores a x, obtenemos los correspondientes de y.

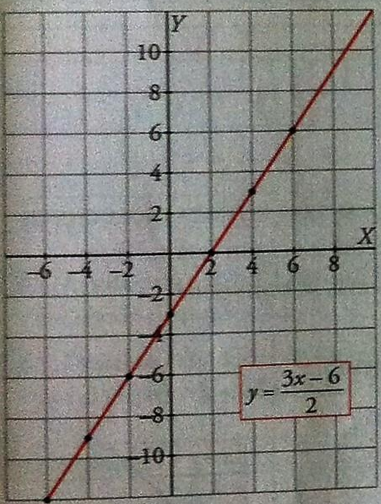
X	0	5	10	15	20	–5	…
Y	45	30	15	0	–15	60	…



Al representar estos valores en el plano, quedan alineados en una recta.

2. Actividades para **practicar** la representación gráfica de ecuaciones lineales.

- Cada ecuación lineal tiene una recta asociada en el plano.
- Cada punto de esa recta representa una de las infinitas soluciones de la ecuación lineal.



Ejercicio resuelto

Representar gráficamente la ecuación $3x - 2y - 6 = 0$.

- Despejamos y para construir la tabla de valores:

$3x - 2y - 6 = 0$

$3x - 6 = 2y$

$y = \dfrac{3x - 6}{2}$

X	–6	–4	–2	0	2	4	6	…
Y	–12	–9	–6	–3	0	3	6	…

- A la izquierda puedes ver la representación gráfica.

Actividades

5 Para cada ecuación, completa la tabla siguiente y represéntala:

a) $x - y = 0 \rightarrow y = x$ b) $x - 2y = 2 \rightarrow y = \dfrac{x-2}{2}$

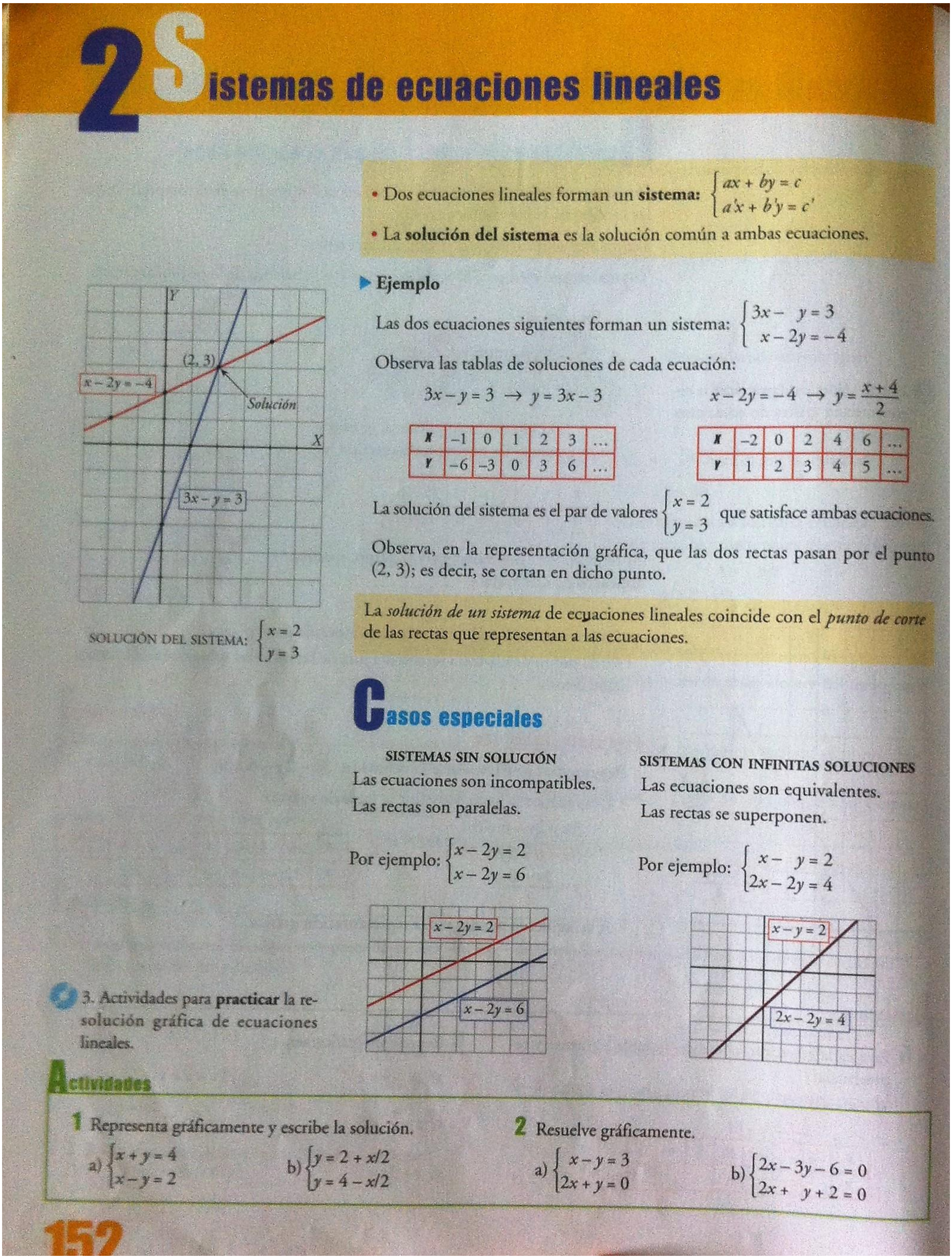
X	–6	–4	–2	0	2	4	6	…
Y								…

6 Representa gráficamente.

a) $2x - y = 1$ b) $2x + y = 1$

c) $y = \dfrac{x}{2} + 3$ d) $y = \dfrac{x}{2} - 1$

e) $x + 3y = 3$ f) $2x - 3y - 3 = 0$



2 Sistemas de ecuaciones lineales

- Dos ecuaciones lineales forman un **sistema:** $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
- La **solución del sistema** es la solución común a ambas ecuaciones.

SOLUCIÓN DEL SISTEMA: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

Ejemplo

Las dos ecuaciones siguientes forman un sistema: $\begin{cases} 3x - \ \ y = 3 \\ \ \ x - 2y = -4 \end{cases}$

Observa las tablas de soluciones de cada ecuación:

$3x - y = 3 \rightarrow y = 3x - 3$

X	–1	0	1	2	3	…
Y	–6	–3	0	3	6	…

$x - 2y = -4 \rightarrow y = \dfrac{x + 4}{2}$

X	–2	0	2	4	6	…
Y	1	2	3	4	5	…

La solución del sistema es el par de valores $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ que satisface ambas ecuaciones.

Observa, en la representación gráfica, que las dos rectas pasan por el punto (2, 3); es decir, se cortan en dicho punto.

La *solución de un sistema* de ecuaciones lineales coincide con el *punto de corte* de las rectas que representan a las ecuaciones.

Casos especiales

SISTEMAS SIN SOLUCIÓN

Las ecuaciones son incompatibles.

Las rectas son paralelas.

Por ejemplo: $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

SISTEMAS CON INFINITAS SOLUCIONES

Las ecuaciones son equivalentes.

Las rectas se superponen.

Por ejemplo: $\begin{cases} \ \ x - \ \ y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

3. Actividades para **practicar** la resolución gráfica de ecuaciones lineales.

Actividades

1 Representa gráficamente y escribe la solución.

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2 + x/2 \\ y = 4 - x/2 \end{cases}$

2 Resuelve gráficamente.

a) $\begin{cases} \ \ x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y - 6 = 0 \\ 2x + \ \ y + 2 = 0 \end{cases}$

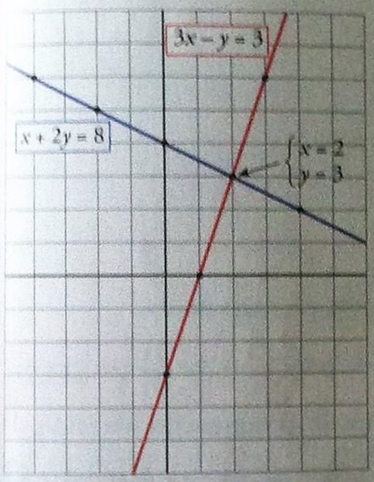
152

3 Métodos para la resolución de sistemas lineales

Vamos a aprender algunas técnicas para resolver sistemas de ecuaciones. Todas siguen una línea común: obtener, a partir de las dos ecuaciones, otra *ecuación con una sola incógnita*. Resuelta esta, es fácil obtener el valor de la otra incógnita.

Método de sustitución

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y la expresión obtenida se sustituye en la otra ecuación.



Ejercicio resuelto

Resolver por sustitución este sistema: $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

a) Despejamos, por ejemplo, x en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \;\rightarrow\; x = \boxed{8 - 2y} \end{cases}$$

b) Sustituimos la expresión obtenida en la primera ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 3 \\ x = 8 - 2y \end{array}\right\} \rightarrow 3\underbrace{(8 - 2y)} - y = 3$$

c) Ya tenemos una ecuación con una sola incógnita. La resolvemos:

$$3(8 - 2y) - y = 3 \rightarrow 24 - 6y - y = 3 \rightarrow 7y = 21 \rightarrow y = \frac{21}{7} \rightarrow \boxed{y = 3}$$

d) Sustituimos el valor $y = 3$ en la expresión obtenida al despejar x, y calculamos:

$$x = 8 - 2y \rightarrow x = 8 - 2 \cdot 3 \rightarrow \boxed{x = 2}$$

Solución del sistema $\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

4. **Ayuda** para resolver sistemas por el método de sustitución.

5. **Practica:** resolución de sistemas por el método de sustitución.

Actividades

1 Resuelve por sustitución y comprueba que obtienes las soluciones que se adjuntan abajo.

a) $\begin{cases} y = x \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2y \\ x + 3y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x + 1 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 3$, $y = 3$ b) $x = 4$, $y = 2$ c) $x = 9$, $y = 10$ d) $x = 2$, $y = -1$

2 Resuelve por sustitución y comprueba las soluciones que se ofrecen.

a) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 3$, $y = 4$ b) $x = 3$, $y = 5$ c) $x = 5$, $y = -2$ d) $x = -1$, $y = -4$

153

Método de igualación

Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas.

Resolviendo el mismo ejercicio que en la página anterior, podrás contrastar la diferencia entre los dos métodos.

Ejercicio resuelto

Resolver por igualación: $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

a) Despejamos, por ejemplo, x en ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \rightarrow x = \boxed{\dfrac{3+y}{3}} \\ x + 2y = 8 \rightarrow x = \boxed{8 - 2y} \end{cases}$$

b) Igualamos las dos expresiones obtenidas para x:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3+y}{3} \\ x = 8 - 2y \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{3+y}{3} = 8 - 2y$$

c) Ya tenemos una ecuación con una incógnita. La resolvemos:

$$\frac{3+y}{3} = 8 - 2y \rightarrow 3 + y = 24 - 6y \rightarrow 7y = 21 \rightarrow y = \frac{21}{7} \rightarrow \boxed{y = 3}$$

d) Sustituimos el valor $y = 3$ en cualesquiera de las expresiones obtenidas al despejar x, y calculamos:

$$x = \frac{3+y}{3} \rightarrow x = \frac{3+3}{3} \rightarrow \boxed{x = 2}$$

Solución del sistema $\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

Ten en cuenta

Método de igualación, despejando la incógnita y:

a) $\begin{cases} 3x - y = 3 \rightarrow y = 3x - 3 \\ x + 2y = 8 \rightarrow y = \dfrac{8-x}{2} \end{cases}$

b) $3x - 3 = \dfrac{8-x}{2}$

c) $6x - 6 = 8 - x \rightarrow 7x = 14 \rightarrow$
$\rightarrow \boxed{x = 2}$

d) $y = 3x - 3 \rightarrow y = 3 \cdot 2 - 3 \rightarrow$
$\rightarrow \boxed{y = 3}$

Solución $\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

6. **Ayuda** para resolver sistemas por el método de igualación.

7. **Practica:** resolución de sistemas por el método de igualación.

Actividades

3 Resuelve por igualación y comprueba que obtienes las soluciones que se adjuntan.

a) $\begin{cases} x = y \\ x = 3y - 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 3x \\ y = 5x - 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y + 6 = 0 \\ 5x - y + 1 = 0 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 5$, $y = 5$ b) $x = 2$, $y = 6$ c) $x = 5$, $y = -1$ d) $x = -1$, $y = -4$

4 Resuelve por igualación y comprueba las soluciones que se ofrecen.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 2y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 7 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 4$, $y = 1$ b) $x = -1$, $y = -2$ c) $x = -2$, $y = 5$ d) Sin solución.

154

Método de reducción

- Se multiplican las ecuaciones, en forma general, por los números adecuados para que los coeficientes de una de las incógnitas sean opuestos.
- Al sumar miembro a miembro las ecuaciones, dicha incógnita desaparece.

Ten en cuenta

Resolución del sistema reduciendo x:

a) $\begin{cases} 3x - y = 3 \longrightarrow 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \xrightarrow{\cdot(-3)} -3x - 6y = -24 \end{cases}$

b) $$\begin{array}{r} \cancel{3x} - y = 3 \\ \underline{-\cancel{3x} - 6y = -24} \\ -7y = -21 \end{array}$$

c) $y = \dfrac{-21}{-7} \rightarrow \boxed{y = 3}$

d) $\left.\begin{array}{l} 3x - y = 3 \\ y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow 3x - 3 = 3 \rightarrow$

$\rightarrow 3x = 6 \rightarrow \boxed{x = 2}$

Solución $\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

8. **Ayuda** para resolver sistemas por el método de reducción.

9. **Practica:** resolución de sistemas por el método de reducción.

Ejercicio resuelto

Resolver por reducción: $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

a) Multiplicamos la primera ecuación por +2 para que los coeficientes de la incógnita y sean opuestos (+2, −2):

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 3 \xrightarrow{\cdot 2} 6x - 2y = 6 \\ x + 2y = 8 \longrightarrow x + 2y = 8 \end{array}\right\}$$

b) Ahora, sumando miembro a miembro, obtenemos una ecuación con una sola incógnita (x):

$$\begin{array}{r} 6x - \cancel{2y} = 6 \\ \underline{x + \cancel{2y} = 8} \\ 7x \quad = 14 \end{array}$$

c) Resolvemos la ecuación obtenida:

$$7x = 14 \rightarrow x = \frac{14}{7} \rightarrow \boxed{x = 2}$$

d) Sustituimos el valor $x = 2$ en cualesquiera de las ecuaciones iniciales:

$$3x - y = 3 \rightarrow 3 \cdot 2 - y = 3 \rightarrow 6 - y = 3 \rightarrow 6 - 3 = y \rightarrow \boxed{y = 3}$$

Solución del sistema $\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

Actividades

5 Resuelve por reducción sumando o restando directamente las ecuaciones.

a) $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 4y = 17 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$

6 Resuelve por reducción siguiendo las instrucciones.

a) $\begin{cases} 4x + y = 1 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$ (Multiplica la 1.ª ecuación por +3).

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$ (Multiplica la 1.ª ecuación por +5, y la 2.ª, por +3).

7 Resuelve por el método de reducción y comprueba las soluciones.

a) $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x - 5y = -9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 3y = 12 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 7y = -8 \\ 5x - 3y = 21 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 2$, $y = -2$ b) $x = -1$, $y = 1$ c) $x = 3$, $y = -1$ d) $x = 3$, $y = -2$

4 Resolución de problemas con ayuda de los sistemas de ecuaciones

10. Actividades para **practicar** la resolución de sistemas por el método más adecuado.

Los sistemas de ecuaciones suponen una potente herramienta para resolver problemas.

Estudia con detenimiento los ejemplos que tienes a continuación, pues representan **problemas tipo** que te servirán de modelo para resolver otros similares.

Problemas resueltos

1. Pepa tiene 5 años más que su hermano Enrique, y entre los dos suman 21 años.

¿Cuál es la edad de cada uno?

a) Identifica los elementos del problema y codifícalos algebraicamente:

EDAD DE PEPA $\rightarrow x$

EDAD DE ENRIQUE $\rightarrow y$

b) Expresa, mediante ecuaciones, las relaciones existentes entre esos elementos:

PEPA TIENE 5 AÑOS MÁS QUE ENRIQUE. $\rightarrow x = y + 5$

LA SUMA DE LAS EDADES ES 21. $\rightarrow x + y = 21$

c) Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x = y + 5 \\ x + y = 21 \end{array}\right\} \rightarrow \underbrace{(y+5)}_{x} + y = 21 \rightarrow 2y + 5 = 21 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2y = 21 - 5 \rightarrow 2y = 16 \rightarrow \boxed{y = 8}$$

$$x = y + 5 \rightarrow x = 8 + 5 \rightarrow \boxed{x = 13}$$

d) Interpreta la solución en el contexto del problema y compruébala:

Solución: Pepa tiene 13 años, y su hermano, 8 años.

Comprobación: $\begin{cases} 13 = 8 + 5 \\ 13 + 8 = 21 \end{cases}$

Actividades

1 En una clase hay 29 alumnos y alumnas, pero el número de chicas supera en tres al de chicos.

¿Cuántos alumnos y cuántas alumnas hay en la clase?

CHICOS $\rightarrow x$ CHICAS $\rightarrow y$

CHICOS + CHICAS = 29

CHICAS = CHICOS + 3

2 La suma de dos números es 12, y el triple del menor supera en una unidad al doble del mayor.

¿Cuáles son esos números?

N.º MENOR $\rightarrow x$ N.º MAYOR $\rightarrow y$

MENOR + MAYOR = 12

TRIPLE DEL MENOR = DOBLE DEL MAYOR + 1

156

2. La semana pasada, dos entradas para el cine y una caja de palomitas nos costaron 10 €.

Hoy, por cuatro entradas y tres cajas de palomitas hemos pagado 22 €.

¿Cuánto cuesta una entrada? ¿Y una caja de palomitas?

a) Identifica y codifica algebraicamente los elementos del problema:

PRECIO DE UNA ENTRADA $\rightarrow x$

PRECIO DE UNA CAJA DE PALOMITAS $\rightarrow y$

b) Expresa, mediante ecuaciones, las relaciones existentes entre los elementos:

COSTE DE 2 ENTRADAS Y 1 CAJA DE PALOMITAS $\left.\right\} < \begin{matrix} 2x + y \\ 10\ € \end{matrix} \rightarrow 2x + y = 10$

COSTE DE 4 ENTRADAS Y 3 CAJAS DE PALOMITAS $\left.\right\} < \begin{matrix} 4x + 3y \\ 22\ € \end{matrix} \rightarrow 4x + 3y = 22$

c) Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 10 \\ 4x + 3y = 22 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot(-2)} -4x - 2y = -20 \\ \xrightarrow{} 4x + 3y = 22 \\ \hline \phantom{\xrightarrow{\cdot(-2)}} \qquad\quad y = 2 \rightarrow \boxed{y = 2} \end{array}$$

$$2x + y = 10 \rightarrow 2x + 2 = 10 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow \boxed{x = 4}$$

d) Interpreta la solución en el contexto del problema y compruébala:

Solución: Una entrada cuesta 4 €, y una caja de palomitas, 2 €.

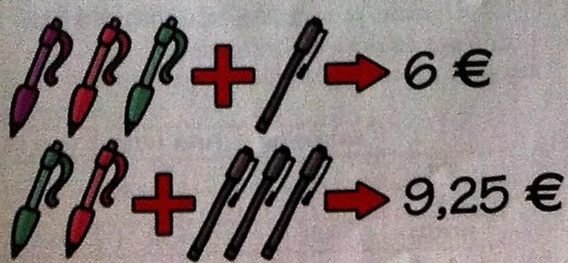
Comprobación: $\begin{cases} 2 \cdot 4 + 2 = 8 + 2 = 10 \\ 4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 16 + 6 = 22 \end{cases}$

Actividades

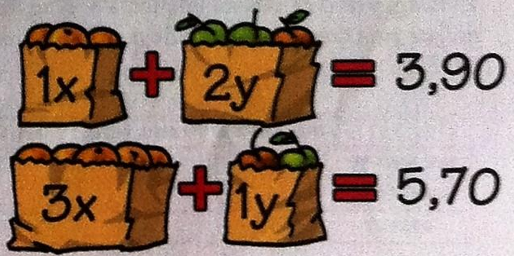
3 He comprado tres bolígrafos y un rotulador por 6 €.

Mi amiga Rosa ha pagado 9,25 € por dos bolígrafos y tres rotuladores.

¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Y un rotulador?



4 En la frutería, un cliente ha pagado 3,90 € por un kilo de naranjas y dos de manzanas. Otro cliente ha pedido tres kilos de naranjas y uno de manzanas, y ha pagado 5,70 €. ¿Cuánto cuesta un kilo de naranjas? ¿Y uno de manzanas?



11. **Ayuda** para la resolución de problemas utilizando los sistemas de ecuaciones.

3. Mezclando aceite de oliva a 4,30 €/litro, con otra clase de aceite de inferior calidad, a 2,80 €/litro, se han obtenido 500 litros de mezcla de calidad intermedia que resulta a 3,40 €/litro.

¿Cuántos litros de cada clase de aceite se han utilizado?

a) Identifica y codifica algebraicamente los elementos del problema:

	CANTIDAD (l)	PRECIO (€/l)	COSTE (€)
ACEITE SUPERIOR	x	4,30	$4{,}30 \cdot x$
ACEITE INFERIOR	y	2,80	$2{,}80 \cdot y$
MEZCLA	500	3,40	$500 \cdot 3{,}40$

b) Expresa, mediante ecuaciones, las relaciones que ligan los elementos:

LITROS EN LA MEZCLA $\left\langle \begin{array}{l} x+y \\ 500 \end{array} \right. \rightarrow x + y = 500$

COSTE DE LA MEZCLA $\left\langle \begin{array}{l} 4{,}3x + 2{,}8y \\ 500 \cdot 3{,}4 \end{array} \right. \rightarrow 4{,}3x + 2{,}8y = 1\,700$

c) Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = 500 \\ 4{,}3x + 2{,}8y = 1\,700 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = 500 - y \\ \rightarrow 4{,}3 \cdot (500 - y) + 2{,}8y = 1\,700 \rightarrow \end{array}$$

$$\rightarrow 2\,150 - 4{,}3y + 2{,}8y = 1\,700 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\,150 - 1{,}5y = 1\,700 \rightarrow$$

$$\rightarrow 450 = 1{,}5y \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{450}{1{,}5} \rightarrow \boxed{y = 300}$$

$$x + y = 500 \rightarrow x + 300 = 500 \rightarrow \boxed{x = 200}$$

d) Interpreta la solución en el contexto del problema y compruébala:

Solución: Se han utilizado 200 *l* del aceite superior y 300 *l* del inferior.

Comprobación: $\begin{cases} 200 + 300 = 500 \\ 200 \cdot 4{,}3 + 300 \cdot 2{,}8 = 860 + 840 = 1\,700 \end{cases}$

Actividades

5 ¿Qué cantidades de café, uno de calidad superior, a 13 €/kg, y otro de calidad inferior, a 8 €/kg, hay que utilizar para conseguir 30 kg de mezcla que resulte a 10 €/kg?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
CAFÉ SUPERIOR	x	13	$13x$
CAFÉ INFERIOR	y	8	$8y$
MEZCLA	30	10	300

6 ¿Qué cantidades de oro, a 8 €/gramo, y de plata, a 1,7 €/gramo, se necesitan para obtener 1 kg de aleación que resulte a 4,22 €/gramo?

	CANTIDAD (g)	PRECIO (€/g)	COSTE (€)
ORO	x	8	$8x$
PLATA	y	1,7	$1{,}7y$
ALEACIÓN	1 000	4,22	4 220

158

Ejercicios y problemas

Sistemas de ecuaciones. Resolución gráfica

1 Representa estas ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

a) Escribe las coordenadas del punto de corte.

b) Escribe la solución del sistema que forman ambas ecuaciones.

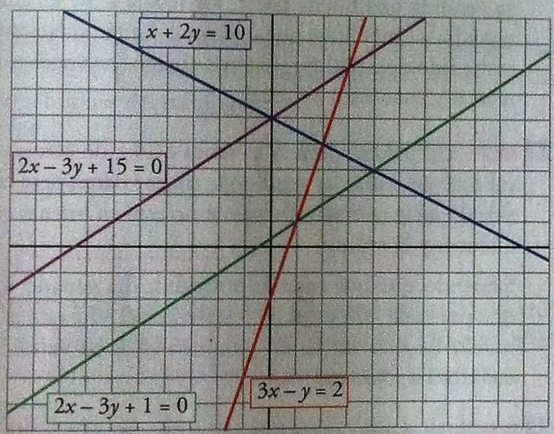
2 Repite el ejercicio anterior para estas ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x - \ \ y &= 2 \\ x + 4y &= 12 \end{aligned}\right\}$$

3 Resuelve gráficamente.

a) $\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - \ \ y = -3 \end{cases}$

4 Observa el gráfico y responde.



a) Escribe un sistema cuya solución sea $x = 2,\ y = 4$.

b) Escribe un sistema cuya solución sea $x = 0,\ y = 5$.

c) Escribe un sistema sin solución.

Sistemas de ecuaciones. Resolución algebraica

5 Resuelve por sustitución despejando la incógnita más adecuada.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - \ \ y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 4y = 1 \\ 2x - \ \ y = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = -5 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases}$

6 Resuelve por igualación.

a) $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = 5x - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y = 8 \\ 3x + 5y = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 7x + 3y = 0 \end{cases}$

7 Resuelve por reducción.

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 5x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 3x - \ \ y = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - \ \ y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

8 Resuelve por el método que te parezca más adecuado.

a) $\begin{cases} 2y = x + 8 \\ y = 2x + 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = -5 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - \ \ y = 1 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6x - 2y = 0 \\ 3x - 5y = 12 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 7x - 5y = 10 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$

9 **Ejercicio resuelto**

Resolver este sistema: $\begin{cases} 2(x - 3) + 1 = \dfrac{y - 1}{2} \\ 3(x - 2) = 4(y + 3) + 5 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} 2(x-3) + 1 &= \frac{y-1}{2} \\ 3(x-2) &= 4(y+3) + 5 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 2x - 6 + 1 &= \frac{y-1}{2} \\ 3x - 6 &= 4y + 12 + 5 \end{aligned}\right\} \to$$

$$\left.\begin{aligned} 4x - 10 &= y - 1 \\ 3x - \ \ 6 &= 4y + 17 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 4x - \ \ y &= 9 \\ 3x - 4y &= 23 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{\cdot 4} \\ &\xrightarrow{\cdot (-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow\ \ 16x - \cancel{4y} &= 36 \\ \longrightarrow\ \ -3x + \cancel{4y} &= -23 \\ \hline 13x \qquad &= 13 \quad \to \boxed{x = 1} \end{aligned}$$

$$4x - y = 9 \to 4 \cdot 1 - y = 9 \to \boxed{y = -5}$$

Solución: $x = 1,\ y = -5$

Ejercicios y problemas

10 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2(3x+y)+x=4(x+1) \\ 6(x-2)+y=2(y-1)+3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5(2x+1)=4(x-y)-1 \\ \dfrac{x-y}{2}=\dfrac{x+5}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x-4}{2}-\dfrac{y-5}{3}=0 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=2x-y \end{cases}$

Problemas para resolver con sistemas de ecuaciones

11 La suma de dos números es 57, y su diferencia, 9. ¿Cuáles son esos números?

12 Calcula dos números sabiendo que su diferencia es 16 y que el doble del menor sobrepasa en cinco unidades al mayor.

13 Calcula dos números sabiendo que:

— El primero sobrepasa en 4 unidades a la mitad del segundo.

— El segundo sobrepasa en 7 unidades a la mitad del primero.

14 La suma de dos números es 73, y al cuádruplo del menor le faltan dos unidades para alcanzar al triple del mayor. ¿Cuáles son esos números?

15 Entre Alejandro y Palmira llevan 15 euros. Si él le diera a ella 1,5 €, ella tendría el doble. ¿Cuánto lleva cada uno?

16 Un ciclista sube un puerto y, después, desciende por el mismo camino. Sabiendo que en la subida ha tardado 23 minutos más que en la bajada y que la duración total del paseo ha sido de 87 minutos, ¿cuánto ha tardado en subir? ¿Y en bajar?

17 En cierta cafetería, por dos cafés y un refresco nos cobraron el otro día 2,70 €.

Hoy hemos tomado un café y tres refrescos y nos han cobrado 4,10 €.

¿Cuánto cuesta un café? ¿Y un refresco?

18 Un puesto ambulante vende los melones y las sandías a un tanto fijo la unidad.

Andrea se lleva 5 melones y 2 sandías, que le cuestan 13 €. Julián paga 12 € por 3 melones y cuatro sandías.

¿Cuánto cuesta un melón? ¿Y una sandía?

19 Un fabricante de jabones envasa 550 kg de detergente en 200 paquetes, unos de 2 kg y otros de 5 kg. ¿Cuántos envases de cada clase utiliza?

20 Una tienda de artículos para el hogar pone a la venta 100 juegos de cama a 70 € el juego. Cuando lleva vendida una buena parte, los rebaja a 50 €, continuando la venta hasta que se agotan. La recaudación total ha sido de 6 600 €. ¿Cuántos juegos ha vendido sin rebajar y cuántos rebajados?

21 Un frutero pone a la venta 80 kg de cerezas. Al cabo de unos días ha vendido la mayor parte, pero considera que la mercancía restante no está en buenas condiciones y la retira.

Sabiendo que por cada kilo vendido ha ganado 1 €, que por cada kilo retirado ha perdido 2 € y que la ganancia ha sido de 56 €, ¿cuántos kilos ha vendido y cuántos ha retirado?

22 En el zoo, entre búfalos y avestruces hay 12 cabezas y 34 patas. ¿Cuántos búfalos son? ¿Y avestruces?

Búfalos → x

Avestruces → y

Patas de búfalo → $4x$

Patas de avestruz → $2y$

160

23 En una granja, entre gallinas y conejos se cuentan 127 cabezas y 338 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay en la granja?

24 Rosendo tiene en el bolsillo 12 monedas, unas de 20 céntimos y otras de 50 céntimos. Si en total tiene 3,30 euros, ¿cuántas monedas de cada tipo lleva?

25 Cristina tiene el triple de edad que su prima María, pero dentro de diez años solo tendrá el doble. ¿Cuál es la edad de cada una?

	HOY	DENTRO DE 10 AÑOS
CRISTINA	x	$x + 10$
MARÍA	y	$y + 10$

26 El doble de la edad de Javier coincide con la mitad de la edad de su padre. Dentro de cinco años, la edad del padre será tres veces la de Javier. ¿Cuántos años tiene hoy cada uno?

27 La base de un rectángulo es 8 cm más larga que la altura, y el perímetro mide 42 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo.

Diferencia entre los lados:

$x - y = 8$

Perímetro:

$x + y + x + y = 42$

28 Para cercar una parcela rectangular, 25 metros más larga que ancha, se han necesitado 210 metros de alambrada. Calcula las dimensiones de la parcela.

29 Un concurso televisivo está dotado de un premio de 3 000 € para repartir entre dos concursantes. El reparto se hará en partes proporcionales al número de pruebas superadas.

Tras la realización de estas, resulta que el primer concursante ha superado cinco pruebas, y el segundo, siete. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

El primer concursante se lleva $\rightarrow x$
El segundo concursante se lleva $\rightarrow y$
Entre los dos se llevan $\rightarrow x + y$
El premio conseguido es proporcional al número de pruebas superadas $\rightarrow x/5 = y/7$

30 ¿Qué cantidades de aceite, uno puro de oliva, a 3 €/litro, y otro de orujo, a 2 €/litro, hay que emplear para conseguir 600 litros de mezcla a 2,40 €/litro?

31 Un ciclista sale de paseo y recorre un tramo de carretera, cuesta arriba, a 8 km/h. Después, sigue llaneando, a 20 km/h, hasta que llega a su destino. Si el paseo ha durado 3 h, y la velocidad media resultante ha sido de 16 km/h, ¿cuánto tiempo ha invertido en cada tramo?

Tiempo de subida $\rightarrow x$
Tiempo en llano $\rightarrow y$
Tiempo total $\rightarrow 3\ h$
Distancia en subida $\rightarrow 8x$
Distancia en llano $\rightarrow 20y$
Distancia total $\rightarrow 16 \cdot 3 = 48\ km$

32 Dos ciudades, A y B, distan 270 km. En cierto momento, un coche parte de A hacia B a 110 km/h, y, a la vez, sale de B hacia A un camión a 70 km/h. ¿Qué distancia recorre cada uno hasta que se encuentran?

La suma de las distancias es 270 $\rightarrow x + y = 270$

Los tiempos invertidos por el coche y el camión, hasta el encuentro, son iguales $\rightarrow x/110 = y/70$

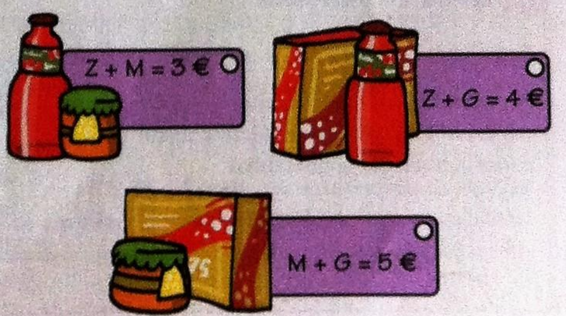
33 Un camión parte de cierta población a 90 km/h. Diez minutos después, sale un coche a 110 km/h. Calcula el tiempo (t) que tarda en alcanzarle y la distancia recorrida desde el punto de partida.

	DISTANCIA	VELOCIDAD	TIEMPO
COCHE	x	110	t
CAMIÓN	x	90	$t + 10/60$

distancia = velocidad · tiempo

34 Un peatón sale de A hacia B caminando a una velocidad de 4 km/h. Simultáneamente, sale de B hacia A un ciclista a 17 km/h. Si la distancia entre A y B es de 7 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse y a qué distancia de A lo hacen?

35 ¿Cuánto cuesta el frasco de zumo? ¿Y el tarro de mermelada? ¿Y la caja de galletas?



Desarrolla tus competencias

Infórmate e investiga

Un sistema especial

¿Te has preguntado alguna vez cuáles son las ecuaciones de los ejes de coordenadas?

Observa:

— En la ecuación $0x + 1y = 0$, la incógnita y toma el valor *cero* valga lo que valga x.

$0x + 1y = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$

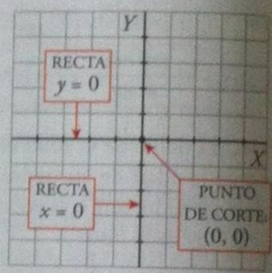
x	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	0	0	0	0	0	0	0	…

¡Es la **ecuación del eje de abscisas**!

— De igual forma, $1x + 0y = 0 \rightarrow x = 0$ es la **ecuación del eje de ordenadas.**

$1x + 0y = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$

x	0	0	0	0	0	0	0	…
y	−3	−2	−1	0	1	2	3	…



- ¿Sabrías decir, ahora, cuál es la solución del sistema formado por ambas ecuaciones?

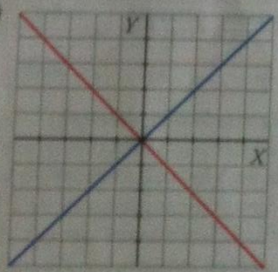
- Los sistemas que tienes a continuación también presentan particularidades. Asocia a cada sistema su representación y di cuál es su solución.

a) $\left.\begin{array}{l} x + 0y = 2 \\ 0x + \;\; y = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = 2 \\ \rightarrow y = 3 \end{array}$

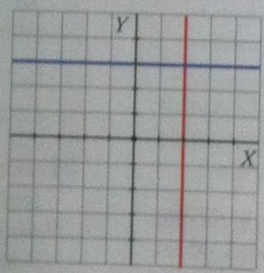
b) $\left.\begin{array}{l} x + 0y = -2 \\ 0x + \;\; y = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = -2 \\ \rightarrow y = -1 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = y \\ \rightarrow x = -y \end{array}$

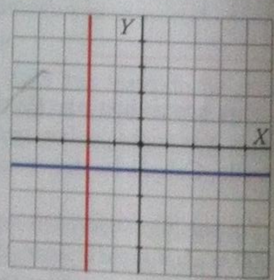
I)



II)



III)



Utiliza tu ingenio

Cada letra, una cifra

Busca al menos tres soluciones a esta suma, teniendo en cuenta que a letras distintas corresponden cifras diferentes:

```
  uno
  uno
  uno
  uno
  uno
+ uno
-----
 seis
```

162

Tantea, experimenta, prueba...

Fichas de dominó

Si en un juego de dominó suprimimos las fichas en las que hay un 5 o un 6, quedan las siguientes (complétalas en tu cuaderno):

0 | 0	1 | 1	2 | 2	|	|
0 | 1	1 | 2	|	|	
0 | 2	|	|		
0 | 3	|			
0 | 4				

- ¿Cuántas quedarían si suprimiésemos solamente las que tienen un 6?
- ¿Y si suprimiésemos las que tienen un 2 o un 4?

- Coloca todas las fichas de la izquierda en este tablero, de forma que cada número de la ficha coincida con el correspondiente del tablero.

  Señala el contorno de cada ficha, igual que se ha hecho con la blanca doble (0, 0).

0	4	3	3	0	1
2	3	0	4	0	2
0	1	2	2	4	4
4	3	2	4	1	0
3	1	1	2	3	1

Autoevaluación

Reflexiona sobre tu aprendizaje

- ¿Representas en el plano ecuaciones de primer grado con dos incógnitas?
- ¿Resuelves gráficamente sistemas de ecuaciones lineales?
- ¿Conoces y aplicas métodos algebraicos (sustitución, reducción, igualación) para resolver ecuaciones lineales?
- ¿Utilizas los sistemas de ecuaciones como herramientas para resolver problemas?

Verifícalo resolviendo ejercicios

1 Representa gráficamente las ecuaciones siguientes:

a) $y = 2x - 1$ b) $2x + 3y - 3 = 0$

2 Resuelve gráficamente este sistema: $\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$

3 Resuelve por el método de sustitución: $\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

4 Resuelve por el método de igualación: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 10 \end{cases}$

5 Resuelve por el método de reducción: $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$

6 Calcula dos números sabiendo que su suma es 119 y que el triple del menor sobrepasa en 17 unidades al doble del mayor.

7 En la cafetería, ayer pagamos 3 € por dos cafés y una tostada. Sin embargo, hoy nos han cobrado 6,30 € por tres cafés y tres tostadas. ¿Cuánto cuesta un café y cuánto una tostada?

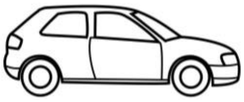
12. En tu CD-ROM tienes una **autoevaluación mucho más amplia y completa.** En él encontrarás, además, orientaciones y, si lo deseas, las soluciones de los ejercicios.

B. Actividad previa al tema

Actividad previa al tema de sistemas de ecuaciones

Tenemos que reparar las ruedas de nuestro coche y el lunes por la mañana llamamos al taller especialista en neumáticos. En el taller, nos dicen que están muy ocupados que tienen 8 vehículos para ese día, entre motos y coches. ¿Cuántos coches hay? ¿Cuántas motos hay?

a) Escribir la ecuación

Nº de coches: 

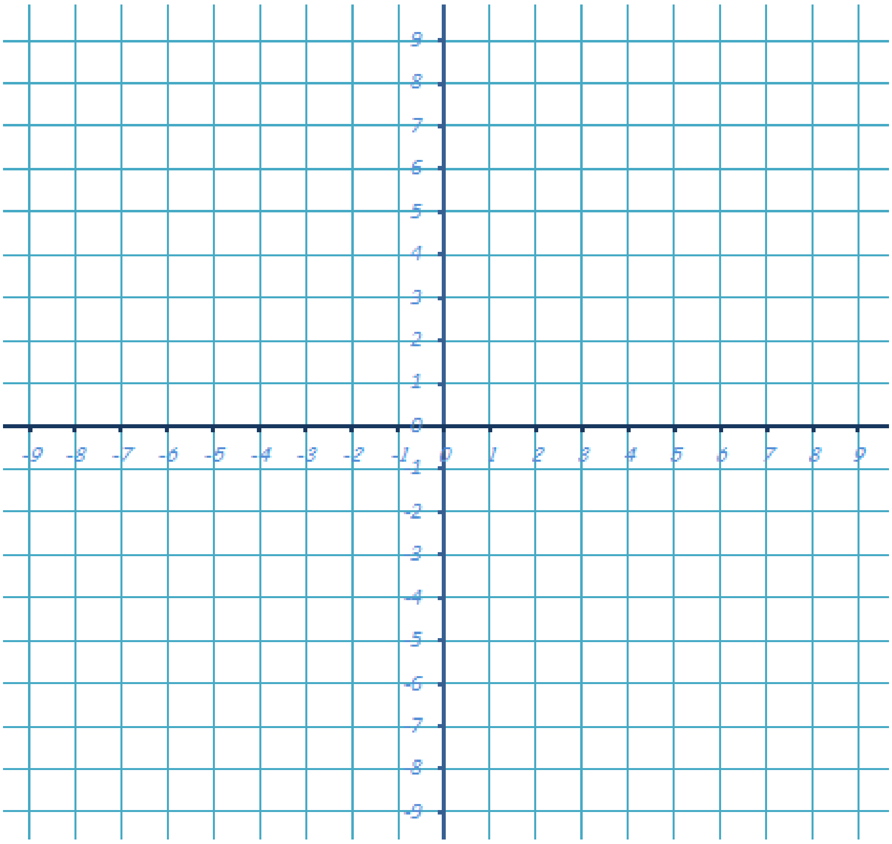
Nº de motos: 

Ecuación (1):

b) Rellena la tabla de datos con posibles respuestas a la ecuación (1)

Nº de coches ( )						
Nº de motos ( )						

c) Representa gráficamente la ecuación (1). ¿Qué observas?



Nos damos cuenta que para responder a esa pregunta necesitamos más datos. Volvemos a llamar al taller y nos dicen que en total tienen 20 ruedas.

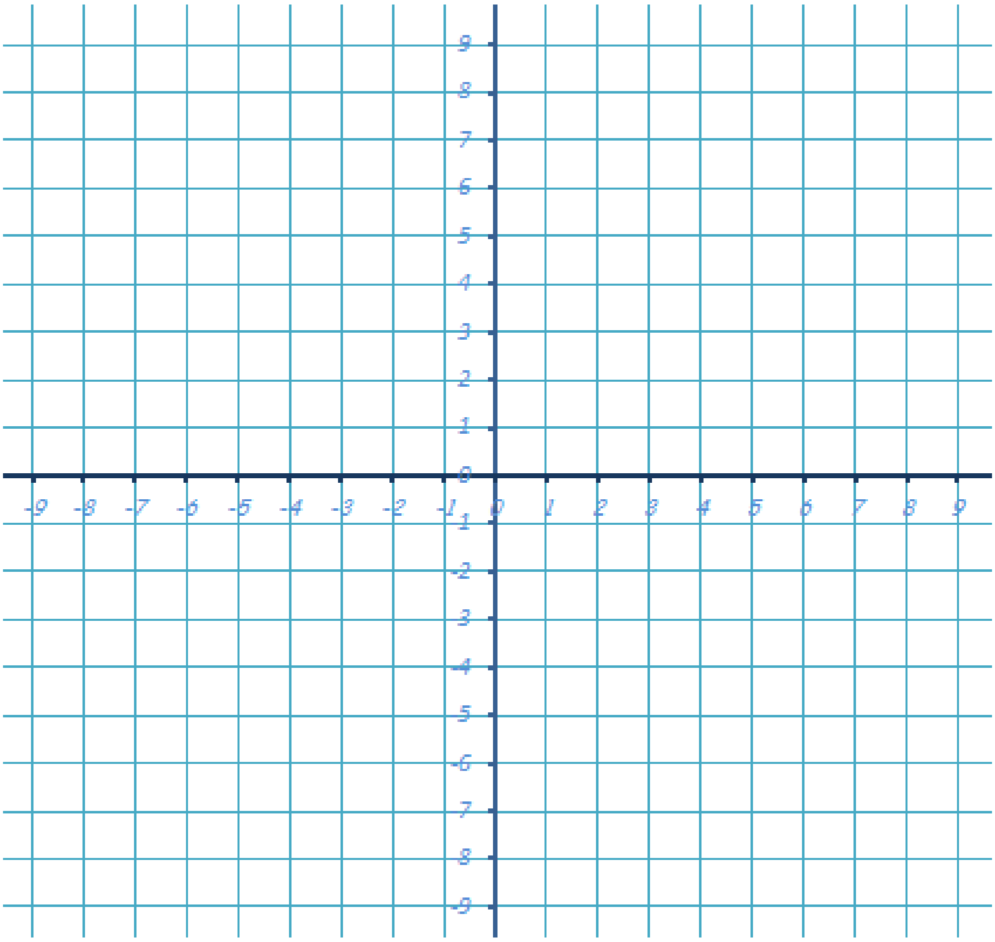
d) Escribe la ecuación (2) del nuevo dato que nos han dado en el taller:

Ecuación 2:

e) Rellena la tabla de datos con posibles respuestas a la ecuación (2)

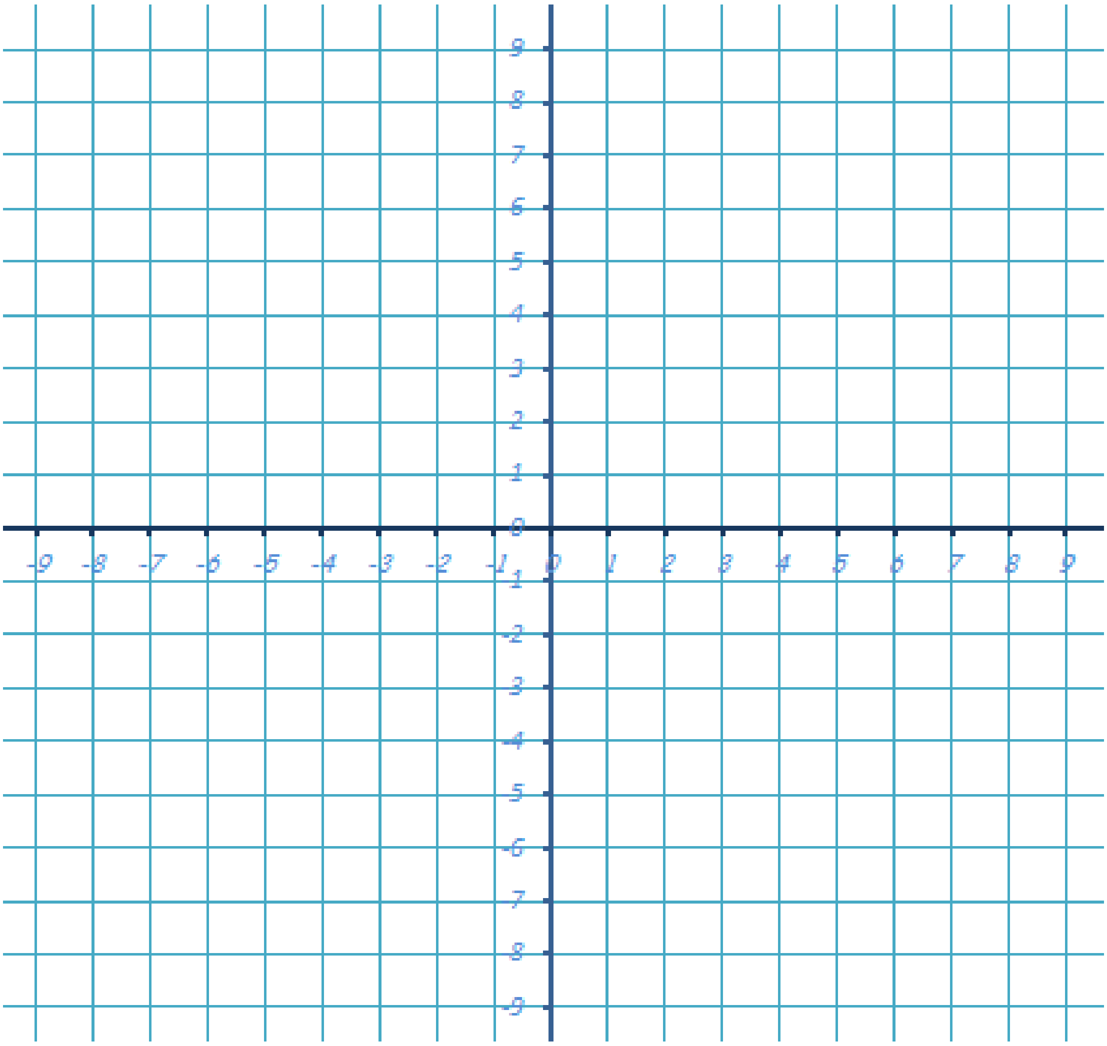
Nº de coches ( )									
Nº de motos ( )									

f) Representa gráficamente la ecuación (2). ¿Qué observas?



No podemos averiguar exactamente el número de coches y el número de motos que hay en el taller si utilizamos un único dato. Pero, ¿qué ocurre si planteamos una solución que cumpla los dos datos proporcionados por el taller?

g) Representa gráficamente la ecuación (1) y la ecuación (2). Interpreta la gráfica y da una solución al problema.



C. Actividad teórico-práctica del método de Gauss - Jordan

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Forma general de una ecuación lineal con dos incógnitas es: $ax + by = c$

Y la forma general de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Donde a, b y c son valores conocidos, x e y son las incógnitas.

Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

- Método de sustitución
- Método de igualación
- Método de reducción
- *Método de Gauss-Jordan*
- ...

Método de Gauss-Jordan

Método de eliminación o reducción sucesiva, a través de matrices.

Matriz: es una tabla de números colocados en filas y columnas. Para saber dónde está un número tenemos que decir que en que fila y en que columna está situado. Puedes poner el ejemplo de situar un alumno en la clase indicando la fila y columna dónde está sentado.

De un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas se formará la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \vdots & c_1 \\ a_2 & b_2 & \vdots & c_2 \end{pmatrix}$$

Objetivo: Eliminar el valor a_2, realizando operaciones básicas, como multiplicar o dividir una fila completa, sumar o restar una fila con otra.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 5x + 3y = -1 \\ 2x - 5y = 12 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & \vdots & -1 \\ 2 & -5 & \vdots & 12 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 5 & 3 & \vdots & -1 \\ 2 & -5 & \vdots & 12 \end{pmatrix}$ Primero, buscamos el factor común entre los valores de la primera columna. En este caso 10, entonces multiplicamos la fila de arriba por 2 y la fila de abajo la multiplicamos por -5.

Para que quede el mismo coeficiente pero de signo opuesto (Cómo hacíamos en el método de reducción).

$\begin{pmatrix} 10 & 6 & \vdots & -2 \\ -10 & +25 & \vdots & -60 \end{pmatrix}$ Realizamos la suma de la fila de abajo con la fila de arriba.

$$\begin{pmatrix} 10 & 6 & \vdots & -2 \\ & 31 & \vdots & -62 \end{pmatrix}$$

Cada fila es una ecuación. Por tanto, obtenemos las siguientes ecuaciones:

1. $31y = -62$;

   $y = -2$

2. $10x + 6y = -2$;

   $10x + 6(-2) = -2$;

   $10x - 12 = -2$;

   $10x = 12 - 2$;

   $10x = 10$;

   $x = 1$

RETO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases}$$

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Directora:
Marisol Gómez Fernández, Departamento de Ingeniería Matemática e Informática